Matematika, 1995, Jilid 11, bil. 2, hlm. 87–94

KESTABILAN KOMODITI TUNGGAL DENGAN MENGGUNAKAN KAEDAH LANGSUNG LYAPUNOV

YUSOF YAACOB & NORMAH MAAN
Jabatan Matematik
Fakulti Sains
Universiti Teknologi Malaysia
Karung Berkunci 791
80990 Johor Bahru, Johor, Malaysia

Abstrak. Model yang diperkenalkan oleh Belair & Mackey[1] mengenai dinamik harga komoditi tunggal dipertimbangkan semula dengan fungsi kernel harga permintaan yang berbeza. Daripada permodelan itu satu persamaan pembeza lengah didapati. Kestabilan harga keseimbangan bagi persamaan yang didapati dianalisis dengan menggunakan kaedah langsung Lyapunov dan dibuktikan bahawa harga keseimbangan adalah stabil setempat seragam.

Katakunci. Harga permintaan, harga penawaran, kernel harga permintaan, kernel harga penawaran, harga keseimbangan, stabil setempat seragam, kaedah langsung Lyapunov.

Abstract. A model proposed by Belair & Mackey[1] concerning price dynamics of a single commodity market is reconsidered with different demand price kernel. From the model, a delay differential equation is obtained. The stability of the equilibrium price is analysed using the Lyapunov's direct method and it is shown that the equlibrium price is locally and uniformally stable.

Keywords. Demand price, supply price, demand price kernel, supply price kernel, equilibrium price, locally and uniformally stable, Lyapunov's direct method.

1 PENGENALAN

Kitaran harga dan pengeluaran bagi berbagai jenis komoditi telah mendapat perhatian ahli ekonomi sejak dulu lagi. Kalecki[7] dan Slutzky[10] mempercayai bahawa kitaran harga dan pengeluaran bagi sesuatu komoditi mempunyai kaitan dengan keadaan fizikal, tarikh barangan berada di pasaran dan tempat barangan itu dipasarkan. Ezekiel[3] dan Goodwin[4] pula membuat spekulasi bahawa kitaran ekonomi mungkin satu sifat semula jadi bagi sesuatu sistem ekonomi. Belair & Mackey[1], Mackey[9], Larson[8] dan Haldane[5] menggunakan model melibatkan persamaan pembeza lengah untuk menyatakan dinamik harga bagi sesuatu komoditi.

Belair & Mackey[1] telah memperkenalkan satu model harga bagi pasaran komoditi tunggal. Ketaklinearan dalam fungsi penawaran dan permintaan dipertimbangkan. Syarat untuk kestabilan setempat bagi harga keseimbangan diterbitkan dalam sebutan keanjalan penawaran dan permintaan serta kelewatan disebabkan proses pengeluaran dan penyimpanan.

Dalam makalah ini model yang diperkenalkan oleh Belair & Mackey[1] mengenai komoditi tunggal dipertimbangkan semula dengan fungsi kernel harga permintaan yang berbeza. Pembentukan model ini diterangkan dalam bahagian 2, dan satu persamaan pembeza lengah tak linear diperolehi.

Analisis kestabilan harga keseimbangan dilakukan dalam bahagian 3. Adalah sukar untuk mengkaji kestabilan mengenai persamaan pembeza tak linear. Oleh itu sebutan berkenaan dikembangkan dalam suatu siri Taylor pada harga keseimbangan dengan mengabaikan sebutan peringkat kedua dan yang lebih tinggi. Dibuktikan bahawa harga keseimbangan bagi persamaan pembeza lengah yang telah dilinearkan itu adalah stabil. Dengan perkataan lain, harga keseimbangan bagi persamaan tak linear adalah stabil setempat. Stabil setempat tidak mengimplikasikan kestabilan menyeluruh, tetapi ketidakstabilan setempat akan mengimplikasikan ketidakstabilan menyeluruh.

Perbincangan ringkas dan kesimpulan dinyatakan dalam bahagian 4.

2 PEMBENTUKAN MODEL

Belair & Mackey[1] mengandaikan dinamik harga pasaran, $P(t)$, bagi sesuatu komoditi tunggal seperti berikut:

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = f(D(P_D), S(P_S)), \tag{2.1}$$

dengan $D(\cdot)$ dan $S(\cdot)$ masing-masing merupakan fungsi permintaan dan penawaran, manakala P_D adalah fungsi harga permintaan dan P_S adalah fungsi harga penawaran. Komoditi tunggal bermakna tidak ada pesaing lain di pasaran bagi komoditi berkenaan, tetapi ia bukanlah suatu komoditi asas yang mesti dibeli oleh pengguna. Komoditi berkenaan dianggap mematuhi dinamik pasaran bebas, khususnya hukum penawaran dan permintaan yang mempengaruhi harga sesuatu komoditi.

Seterusnya diandaikan bahawa permintaan minimum adalah lebih kecil atau sama dengan penawaran maksimum, iaitu

$$\min D(P_D) \leq \text{mak } S(P_S). \tag{2.2}$$

$f(D, S)$ bernilai nyata dan memenuhi keadaan berikut:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(i)} & f(D,S) = 0 \quad \text{apabila} \quad D = S, \\ \text{(ii)} & \dfrac{\partial f}{\partial D} \geq 0\,, \quad \dfrac{\partial f}{\partial S} \leq 0. \end{array}\right\} \tag{2.3}$$

Dalam contoh yang paling mudah f diberi sebagai

$$f(D,S) = D - S. \tag{2.4}$$

2.1 Harga Permintaan

Dalam menentukan bagaimana sikap pengguna memberi kesan kepada permintaan komoditi, Belair & Mackey[1] menganggap bahawa sikap itu mengambil kira maklumat mengenai harga yang lepas. Ini bermakna, permintaan terhadap komoditi bukan sekadar fungsi harga pasaran semasa P, tetapi adalah suatu fungsi pemberat P_D bagi harga yang lepas. Dalam mengira fungsi pemberat ini, diandaikan bahawa pada masa t, pengguna mengambil kira satu pemberat $K_D(t-u)$ kepada harga pasaran yang lepas $P(u)$, dengan $-\infty \leq u \leq t$. Purata pemberat bagi semua harga yang lepas itu adalah harga permintaan.

$$P_D(t) = \int_{-\infty}^{t} K_D(t-u)P(u)du. \tag{2.5}$$

Fungsi pemberat $K_D(q)$ dikenali sebagai kernel harga permintaan dan mempunyai sifat

$$\int_0^\infty K_D(q)\, dq = 1.$$

Dalam makalah ini pertimbangan adalah terhadap pengguna yang mengasaskan keputusan untuk membeli barangan berkenaan kepada harga semasa sahaja tanpa mempertimbangkan harga lepas. Anggapan ini mengimplikasikan kernel harga permintaan adalah fungsi delta Dirac, iaitu

$$K_D(q) = \delta(q).$$

Oleh itu harga permintaan berbentuk

$$P_D(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t-u)P(u)du = P(t).$$

2.2 Harga Penawaran

Belair & Mackey[1] membuat andaian bahawa pengeluar sebelum membuat sesuatu keputusan untuk mengubah pengeluaran akan mengambil kira harga yang lepas. Dalam hal ini fungsi pemberat juga wujud seperti dalam harga permintaan. Ini akan memberikan

$$P_S(t) = \int_{-\infty}^{t} K_S(t-u)P(u)\, du$$

dengan $P_S(t)$ harga penawaran, $K_S(t-u)$ fungsi pemberat dan $P(u)$ harga pasaran yang lepas.

Selain daripada harga yang lepas, wujud faktor tambahan yang mempengaruhi harga penawaran, iaitu kebanyakan komoditi memerlukan masa yang tertentu, $T \geq 0$, sebelum keputusan untuk mengubah pengeluaran itu akhirnya menjadi kenyataan. Contohnya, dalam pasaran komoditi yang berasaskan pertanian, T mempunyai kaitan dengan masa penanaman dan penstoran sebelum komoditi sampai ke pasaran. Oleh itu, hujah dalam kernel harga penawaran K_S adalah $(t-T-u)$, iaitu

$$P_S(t) = \int_{-\infty}^{t} K_S(t-T-u)P(u)\, du.$$

Walau bagaimanapun, seperti kes fungsi permintaan, dalam makalah ini dianggap bahawa pengeluar dalam membuat keputusan untuk mewujudkan pengeluaran hanya mengambil kira harga semasa sahaja. Oleh itu kernel harga penawaran adalah fungsi delta Dirac, iaitu

$$K_S(q) = \delta(q).$$

Oleh itu harga penawaran berbentuk

$$P_S(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t-T-u)P(u)du = P(t-T).$$

Maka model boleh ditulis sebagai

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = f(D(P(t)), S(P(t-T))). \tag{2.6}$$

Persamaan (2.6) berserta dengan spesifikasi fungsi $f(D,S)$, $D(P)$, $S(P)$ dan T melengkapkan formulasi model apabila diberikan fungsi awal

$$P(t) = \phi(t), \ -T \leq t \leq 0.$$

3 KESTABILAN HARGA KESEIMBANGAN

Harga pasaran berada dalam keseimbangan apabila kuantiti yang diminta bersamaan dengan kuantiti yang ditawarkan dan dalam keadaan ini $f(D,S)=0$. Oleh kerana ia berlaku apabila $D=S$, maka harga keseimbangan, P^*, boleh didapati daripada $D(P^*)=S(P^*)$. Anggapan (2.2) mengimplikasikan bahawa wujud sekurang-kurangnya satu harga keseimbangan.

Kestabilan sejagat amat sukar dianalisis walaupun jika f dispesifikasikan secara khusus. Dengan anggapan f mempunyai sifat tertentu, dan dengan menerima pakai anggapan yang telah dinyatakan, berserta dengan anggapan lain yang akan diberikan, kita siasat kestabilan secara setempat. Kestabilan setempat tidak mengimplikasikan kestabilan sejagat, tetapi ketidakstabilan setempat akan mengimplikasikan ketidakstabilan sejagat.

Teorem 3.1
Pertimbangkan persamaan (2.6). Andaikan (2.2) dan (2.3) benar dan wujud terbitan separa semua peringkat bagi f. Andaikan juga

$$P(t)=\phi, \quad -T\le t\le 0 \tag{3.1}$$

selanjar. Maka harga keseimbangan adalah stabil setempat seragam jika

$$(i)\ A_D>0 \quad \text{dan} \quad (ii)\ |A_S|\le |A_D|$$

dengan

$$\left.\begin{aligned} A_D &= -P^*\left(\left.\frac{\partial f}{\partial D}\right|_{D=D^*}\right)\left(\left.\frac{\partial D}{\partial P(t)}\right|_{P(t)=P^*}\right)\\ A_S &= -P^*\left(\left.\frac{\partial f}{\partial S}\right|_{S=S^*}\right)\left(\left.\frac{\partial S}{\partial P(t-T)}\right|_{P(t-T)=P^*}\right). \quad \square \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

Perhatikan bahawa takrif keanjalan permintaan, e_D, ialah

$$e_D=-\frac{\left.\frac{\partial D}{\partial P}\right|_{P=P^*}}{D^*/P^*}$$

dan takrif keanjalan penawaran, e_S, ialah

$$e_S=\frac{\left.\frac{\partial D}{\partial P(t-T)}\right|_{P=P^*}}{S^*/P^*}.$$

dengan $D^*=D(P^*)=S^*=S(P^*)$. Oleh itu A_D dan A_S boleh ditulis dalam sebutan keanjalan permintaan dan keanjalan penawaran sebagai

$$A_D=\frac{e_D}{\tau_D}, \quad A_S=\frac{e_s}{\tau_S}$$

dengan

$$\tau_D=\left(D^*\left.\frac{\partial f}{\partial D}\right|_{D=D^*}\right)^{-1}, \quad \tau_S=\left(S^*\left.\frac{\partial f}{\partial S}\right|_{S=S^*}\right)^{-1}.$$

Sebelum membuktikan Teorem 3.1 kita pertimbangkan lema berikut.

Lema 3.1 (Driver[2])
Pertimbangkan

$$x'(t) = g(t, x(t), x(t-T)), \quad t \geq 0 \tag{3.3a}$$

$$x(t) = \phi(t), \quad -T \leq t \leq 0 \tag{3.3b}$$

dengan ϕ selanjar dan g memenuhi syarat Lipschitz. Jika wujud $V(t,x)$ yang tentu positif, dan $V'(t,x)$ yang tentu tak positif, maka penyelesaian bagi (3.3a) dan (3.3b) adalah stabil. Jika g berautonomi maka kestabilan adalah seragam. □

Penggunaan fungsi $V(t,x)$ bagi menentukan kestabilan seperti yang dinyatakan dalam Lema 3.1 dinamai Kaedah Langsung Lyapunov. Fungsi $V(t,x)$ yang memenuhi Lema 3.1 dinamai fungsi Lyapunov bagi persamaan (3.3a). Jika persamaan g berautonomi maka $V(t,x)$ adalah tentu tak positif jika (i) $V(t,x)$ selanjar dan (ii) $V(t,x) \leq 0$ (Driver[2]).

Lema 3.2
Pertimbangkan persamaan

$$z' = az(t) + bz(t-T) \tag{3.4a}$$

$$z(t) = \phi, \qquad -T \leq t \leq 0 \tag{3.4b}$$

dengan a, b, T pemalar dan $\phi(t)$ selanjar. Andaikan

$$a < 0, \quad |b| \leq |a|, \quad T \geq 0.$$

Maka penyelesaian remeh bagi persamaan (3.4a) dan (3.4b) adalah stabil seragam. □

Bukti Lema 3.2
Pertimbangkan fungsi

$$V(t,z) = z^2(t) + |a| \int_{t-T}^{t} z^2(s)ds, \quad t \geq 0.$$

Fungsi di atas dicadangkan oleh Krasovski (Lihat Driver[2]). Daripada takrif adalah jelas bahawa $V(t,z) \geq 0$. Kita juga dapati

$$\begin{aligned} V'(t,z) &= 2z(t)z'(t) + |a|(z^2(t) - z^2(t-T)) \\ &= 2z(t)z'(t) + |a|z^2(t) - |a|z^2(t-T) \end{aligned}$$

Menggantikan $z'(t) = az(t) + bz(t-T)$ dalam persamaan di atas kita dapati

$$\begin{aligned} V'(t,z) &= 2z(t)(az(t) + bz(t-T)) + |a|z^2(t) - |a|z^2(t-T) \\ &= 2az^2(t) + 2bz(t)z(t-T)) + |a|z^2(t) - |a|z^2(t-T) \end{aligned}$$

Oleh kerana $a < 0$, maka kita dapati

$$V'(t,z) = -|a|z^2(t) + 2bz(t)z(t-T) - |a|z^2(t-T)$$

Sekarang kita tunjukkan

$$-|a|z^2(t) + 2bz(t)z(t-T) - |a|z^2(t-T) \leq 0 \tag{3.5}$$

Kes $b > 0$
Maka $b = |b|$. Oleh kerana $b(z(t) - z(t-T))^2 \geq 0$, maka kita dapati $b(z^2(t) - 2z(t)z(t-T) + z^2(t-T)) \geq 0$, yang memberikan kita

$$2bz(t)z(t-T) \leq |b|z^2(t) + |b|z^2(t-T) \tag{3.6}$$

Menggantikan (3.6) dalam sebelah kiri (3.5), kita dapati

$$\begin{aligned} &-|a|z^2(t) + 2bz(t)z(t-T)|a|z^2(t-T) \\ &\leq |a|z^2(t) + |b|z^2(t) + |b|z^2(t-T) - |a|z^2(t-T) \\ &= (-|a| + |b|)(z^2(t) + z^2(t-T)) \leq 0. \end{aligned}$$

Maka (3.5) terbukti dalam kes ini.

Kes $b < 0$
Maka $b = -|b|$. Oleh kerana $|b| \leq |a|$ maka kita perolehi $-|a| \leq -|b|$ yang memberikan kita

$$-|a|z^2(t) \leq -|b|z^2(t) \tag{3.7}$$

$$-|a|z^2(t-T) \leq -|b|z^2(t-T) \tag{3.8}$$

Menggantikan (3.7) dan (3.8) dalam sebelah kiri persamaan (3.5) memberikan kita

$$\begin{aligned} &-|a|z^2(t) - 2|b|z(t-T) - |a|z^2(t-T) \\ &\leq -|b|z^2(t) - 2|b|z(t)z(t-T) - |b|z^2(t-T) \\ &= -|b|[z^2(t) + 2z(t)z(t-T) + z^2(t-T)] \\ &= -|b|[z(t) + z(t-T)]^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Maka (3.5) terbukti. □

Oleh itu penyelesaian remeh (3.4a) yang memenuhi fungsi awal (3.4b) adalah stabil seragam kerana jelas ianya menepati Lema 3.1.

Sekarang kita buktikan Teorem 3.1.

Bukti Teorem 3.1
Oleh kerana kita mempertimbangkan kestabilan setempat, kita anggap

$$\frac{|P(t) - P^*|}{P^*} << 1. \tag{3.9}$$

Persamaan (2.6) boleh ditulis sebagai

$$\frac{dP}{dt} = P(t)f(D(P(t)), S(P(t-T))). \tag{3.10}$$

Kembangkan sebelah kanan persamaan (3.10) dalam siri Taylor pada P^* dengan mengabaikan peringkat kedua dan lebih tinggi untuk mendapatkan

$$\begin{aligned} &P(t)f(D(P),S(P)) \\ &= P^*f(D(P^*),S(P^*)) \\ &+ (P(t)-P^*)\frac{\partial(Pf)}{\partial D}\bigg|_{D=D^*}\frac{\partial D}{\partial P(t)}\bigg|_{P(t)=P^*} \\ &+ (P(t-T)-P^*)\frac{\partial(Pf)}{\partial S}\bigg|_{S=S^*}\frac{\partial S}{\partial P(t-T)}\bigg|_{P(t-T)=P^*} + \cdots . \end{aligned} \tag{3.11}$$

Perhatikan bahawa oleh kerana $f(D(P^*),S(P^*))=0$ maka kita perolehi

$$\begin{aligned} \frac{\partial(Pf)}{\partial D}\bigg|_{D=D^*} &= \left[P\frac{\partial f}{\partial D} - f\frac{\partial P)}{\partial D}\right]_{D=D^*} = P^*\frac{\partial f}{\partial D}\bigg|_{D=D^*}, \\ \frac{\partial(Pf)}{\partial S}\bigg|_{S=S^*} &= \left[P\frac{\partial f}{\partial S} - f\frac{\partial P)}{\partial S}\right]_{S=S^*} = P^*\frac{\partial f}{\partial S}\bigg|_{S=S^*}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Dengan menggunakan (3.11), (3.12) dan fakta bahawa $f(D(P^*),S(P^*)) = 0$ dalam (3.10), dan seterusnya membuat gantian $z(t) = P(t) - P^*$ kita memperolehi

$$\begin{aligned} \frac{dz(t)}{dt} = P^*\Bigg[&\left(\frac{\partial f}{\partial D}\bigg|_{D=D^*}\right)\left(\frac{\partial D}{\partial P(t)}\bigg|_{P(t)=P^*}\right)z(t) \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial S}\bigg|_{S=S^*}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial P(t-T)}\bigg|_{P(t-T)=P^*}\right)z(t-T)\Bigg] \end{aligned} \tag{3.13}$$

Oleh itu persamaan (3.13) boleh ditulis sebagai

$$\frac{dz}{dt} = -A_D z(t) - A_S z(t-T) \tag{3.10}$$

dengan A_D dan A_S seperti dalam (3.2).

Kita tulis persamaan (3.10) sebagai

$$z' = az(t) + bz(t-T)$$

dengan $a = -A_D$, $b = -A_S$ di mana a, b, T adalah pemalar dan

$$a < 0, \quad |b| \leq |a|, \quad T \geq 0.$$

Kita ketahui bahawa $[\partial D/\partial P(t)]_{P(t)=P^*}$ bernilai negatif kerana sifat fungsi permintaan, dan $[\partial f/\partial D]_{D=D^*}$ bernilai positif oleh kerana anggapan (2.3). Oleh itu

$$A_D = -\left(P^*\frac{\partial f}{\partial D}\bigg|_{D=D^*}\right)\left(\frac{\partial D}{\partial P(t)}\bigg|_{P(t)=P^*}\right) > 0.$$

Adalah jelas bahawa (3.4a) setara dengan (3.10). Daripada Lema 3.1 terbukti penyelesaian bagi persamaan (3.4a) yang menepati fungsi awal (3.4b) adalah stabil setempat seragam $\square$

4 PERBINCANGAN DAN KESIMPULAN

Model asas yang digunakan dalam makalah ini adalah sama seperti yang diusulkan oleh Belair & Mackey[1], iaitu dinamik komoditi tunggal berbentuk

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = f(D(P_D), S(P_S)).$$

Belair & Mackey[1] menggunakan kernal harga penawaran fungsi delta Dirac $K_S(q) = \delta(q)$. Oleh itu harga penawaran berbentuk $P_S(t) = P(t-T)$. Tetapi mereka menggunakan kernal harga permintaan $K_D(q) = [\text{eksp}(-q/T_c)]/T_c$ dengan T_c pemalar. Oleh itu harga permintaan berbentuk

$$P_D(t) = \frac{1}{T_c}\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-u)/T_c} P(u)du.$$

Keputusan asas mengenai kestabilan yang diperolehi mereka hampir sama dengan keputusan yang didapati dalam makalah ini. Konjektur yang boleh diambil daripada perbandingan ini ialah kernel harga permintaan yang berlainan tidak memberi kesan bererti terhadap kestabilan harga keseimbangan.

Belair & Mackey[1] dan Mackey[9] menggunakan nilai eigen persamaan linear yang diperolehi bagi menganalisis kestabilan setempat tentang harga keseimbangan. Mereka menggunakan kriteria Haye[6] dalam menentukan sifat nilai eigen berkenaan. Analisis kestabilan dengan menggunakan nilai eigen hanya boleh digunakan untuk persamaan linear sahaja, tetapi kaedah langsung Lyapunov boleh juga digunakan untuk persamaan tak linear. Walaupun dalam makalah ini analisis kestabilan dengan menggunakan kaedah langsung Lyapunov digunakan ke atas persamaan linear, namun diharapkan ia adalah sebagai langkah pertama bagi menganalisis kestabilan bagi persamaan tak linear berkenaan.

RUJUKAN

[1] J. Belair & M.C. Mackey, *Consumer Memory And Price Fluctuations In Commodity Markets: An Integrodifferential Model*, Journal Of Dynamics And Differential Equation **3** (1989), 299–325.

[2] R.D. Driver, *Ordinary And Delay Differential Equations*, Springer, New York, 1977.

[3] M. Ezekiel, *The Cobweb Theorem*, Quar. J. Econ. **52** (1938), 255–280.

[4] R.M. Goodwin, *The Nonlinear Accelerator And The Persistence Of Business Cycles*, Econometrica **19** (1951), 1–17.

[5] J.B.S. Haldane, *A Contributions To The Theory Of Price Fluctuations*, Rev. Econ. Study **1** (1933), 186–195.

[6] N.D. Haye, *Roots Of The Transcendental Equations Associated With A Certain Difference-Differential Equations*, J. Lond. Math. Soc. **25** (1950), 226–232.

[7] M. Kalecki, *A Macroeconomic Theory Of The Business Cycle*, Econometrica **3** (1935), 327–344.

[8] A.B Larson, *The Hog Cycle As Harmonic Motion*, Journal Of Farm Economic **46** (1964), 375–386.

[9] M.C. Mackey, *Commodity Price Fluctuations: Price Dependent Delays And Nonlinearities as Explanatory Factors*, Journal Of Economic Theory **48** (1989), 497–509.

[10] E. Slutzky, *The Summation Of Random Causes As The Source Of Cyclic Processes*, Econometrica **5** (1937), 105–146.