Matematika, 1998, Jilid 14, hlm. 17–25

Pembinaan Persamaan Korteweg-de Vries Sebagai Sistem Hamiltonan Bermatra Tidak Terhingga

Zainal Abdul Aziz
Jabatan Matematik, Fakulti Sains
Universiti Teknologi Malaysia
81310 UTM Skudai, Johor, Malaysia

Abstrak Dalam kajian ini kita membina persamaan Korteweg-de Vries (pKdV) sebagai sistem Hamiltonan bermatra tidak terhingga. Khususnya, hal ini diperoleh sebagai natijah penting daripada keputusan bahawa sistem tajaan pKdV berlaku di dalam suatu manifold simplektik lemah $(\chi_{s,T}, \omega)$.

Katakunci Persamaan Korteweg-de Vries, sistem Hamiltonan bermatra ∞, tanda kurung Poisson-Gardner, kebolehkamiran.

Abstract *We construct the Korteweg-de Vries equation (pKdV) as an infinite dimensional Hamiltonian system. In particular, this result is derived consequently from the fact that the pKdV's dynamical system exists in a weak symplectic manifold* $(\chi_{s,T}, \omega)$.

Keywords *Korteweg-de Vries equation, ∞-dimensional Hamiltonian system, Poisson-Gardner brackets, integrability.*

1 Pengenalan

Kajian kami cuba memaparkan beberapa aspek penting teori soliton, khususnya sistem dinamik yang diterajui oleh pKdV (persamaan Korteweg- de Vries), mengikut perspektif analisis sejagat. (PKdV ialah suatu persamaan tidak linear yang terkenal memiliki penyelesaian soliton, lihat Jamalludin & Zainal [7], Zainal [15,16]). Tegasnya kami berpendapat bahawa kita boleh membina pKdV sebagai sistem Hamiltonan bermatra tidak terhingga dan mendedahkan kebolehkamiran sistem itu secara lengkap dengan merujuk keputusan-keputusan penting dalam analisis sejagat. Proses pensejagatan ke atas program yang dicadangkan oleh Gardner [5] dan Faddeev & Zakharov [4] itu memang telah diduga boleh dilaksanakan oleh ramai penyelidik (lihat van Groesen & de Jaeger [6]). Secara klasiknya, boleh dibina sistem tajaan pKdV itu sebagai suatu teori medan Hamiltonan dan ini bermakna bahawa pKdV berbentuk

$$\Phi_t - 6\phi\phi_x + \phi_{xxx} = 0 \tag{1}$$

boleh dijelmakan kepada persamaan Hamilton dalam tatatanda simplektik dengan ruang fasa medan klasik itu bersekutu dengan manifold bermatra ∞.

2 Senarai Keputusan Relevan

Berikut disenaraikan keputusan-keputusan relevan lagi terkenal, yang digunakan untuk menyandarkan keputusan utama kami.

Teorem berikut memberikan kewujudan dan keunikan penyelesaian pKdV.

Teorem 1 *Teorem Bona & Smith. Katalah $\phi_0 \in \mathbb{H}^s$, ruang Sobolev dengan $s \geq 3$, maka wujud suatu penyelesaian unik klasik $\phi(\cdot, t) \in \chi_{S,\infty}$ bagi pKdV, yang bergantung secara selanjar terhadap data awal ϕ_0; apabila*

$$\chi_{S,T} = \mathcal{H}_T^s \cap \mathcal{H}_T^{s-3,1} \cap \mathcal{H}_T^{s-6,2} \cap \dots ,$$

ruang fungsi bagi integer $s \geq 0$, T nombor nyata positif atau $+\infty$ dan $\mathcal{H}_T^s = \mathcal{S}([0,T]; \mathbb{H}^s)$ ruang Banach terdiri daripada fungsi-fungsi $\phi \colon R \times [0,T] \longrightarrow R$, bagi setiap $t \in [0,T]$ ada $\phi(\cdot, t) \in \mathbb{H}^s$ selanjar dan terbatas. Norma atas $\mathcal{H}_T^s$ diberikan oleh

$$\|\phi\|_{\mathcal{H}_T^s} = \| \, |\phi\| \, |_s = \sup_{0 \leq t \leq T} \|\phi(\cdot, t)\|_s$$

Bagi integer $k \geq 0$, $\mathcal{S}^k([0,T]; \mathbb{H}^s) = \mathcal{H}_T^{s,k}$ terdiri daripada fungsi-fungsi $\phi \in \mathcal{H}_T^s$ sehinggakan $\partial_t^j \phi \in \mathcal{H}_T^s$ bagi $0 \leq j \leq k$, ∂_t^j terbitan separa j-kali terhadap t. Norma dalam kasus ini:

$$\|\phi\|_{\mathcal{H}_T^{s,k}} = \| \, |\phi\| \, |_{s,k} = \sup_{0 \leq t \leq T} \sup_{0 \leq j \leq k} \|\partial_t^j \phi(\cdot, t)\|_s$$

juga $\mathcal{H}_T^{s,0} = \mathcal{H}_T^s$; atau setaranya,

$$\chi_{s,T} = \{\phi \in \mathcal{H}_T^s : \partial_t^j \phi \in \mathcal{H}_T^{s-3\ell} \quad \textit{bagi} \quad \ell \quad \textit{sehinggakan}, \quad s - 3\ell \geq 0\}$$

Bukti Lihat Bona & Smith [3]. □

Teorem berikut menjamin dalam kasus tertentu ruang fungsi adalah manifold bermatra tidak terhingga.

Teorem 2 *Teorem Kahn. Jika X suatu ruang Hausdorff padat dan M suatu manifold Riemanan, maka ruang fungsi*

$$\Omega(X, M) = \{f | f \colon X \longrightarrow M, f \quad \textit{selanjar}\}$$

suatu manifold Banach (selanjar) terperaga pada suatu ruang Banach (nyata) $T_f\Omega(X, M)$; iaitu ruang tangen Ω pada f.

Bukti Lihat Kahn [9]. □

Kedua-dua teorem di atas digunakan dalam teorem 3 berikutnya. Keputusan berikut memperihal tanda kurung Poisson dan tanda kurung Poisson-Gardner.

Takrif 1 *Takrif Jost [8]. Jika diberikan manifold simplektik* $(\mathbb{P}, \omega)$ *dan dua fungsi,*

$$f\colon \mathbb{R}_f \subset \mathbb{P} \longrightarrow R \quad dan \quad h\colon \mathbb{R}_h \subset \mathbb{P} \longrightarrow R$$

sehinggakan

$$X_f\colon \mathbb{R}_{X_f} \longrightarrow T\mathbb{P}_{|R_{X_f}} \quad dan \quad X_h\colon \mathbb{R}_{X_h} \longrightarrow T\mathbb{P}_{|R_{X_h}}$$

medan vektor Hamiltonan, maka boleh ditakrifkan tanda kurung Poisson $\{\cdot,\cdot\}$ *kedua-dua fungsi itu, pada* $\mathbb{R}_{X_f} \cap \mathbb{R}_{X_h}$*; iaitu*

$$\begin{aligned} \{f, h\} &= \omega_x\left(X_f(x), X_h(x)\right) \\ &= i_{X_h} \cdot i_{X_f} \omega_x(x) \\ &= i_{X_h} \cdot df(x) \end{aligned}$$

Lema 1 *Lema Gardner. Tanda kurung Poisson-Gardner bagi dua fungsian* I_j *dan* I_k *(berbentuk* $I_j[\phi] = \int_R P_j(\phi, \phi_x, \dots)\, dx, \quad j \in Z_+$*) boleh diungkapkan sebagai*

$$\{I_j, I_k\} = \int_{-\infty}^{\infty} G_{P_j} J F_{P_k}\, dx; \quad \forall\ j,\, k \in Z_+$$

$J = \partial_x$ *dan*

$$G_{P_j} \equiv \frac{\delta P_j}{\delta \phi} = \partial_\phi P_j - \partial_x(\partial_{\phi_x P_j)} + \partial_x^2(\partial_{\phi_{xx}} P_j - \dots$$

dan

$$\delta I_j(v) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{P_j}(\phi) \cdot v\, dx; \quad \forall\ v \in \mathcal{L}_2$$

Bukti Gardner [5]. □

Kedua-dua keputusan ini digunakan dalam teorem 4 berikutnya.

3 Keputusan Utama

Berikut merupakan keputusan utama kami.

Teorem 3 *Sistem dinamik tajaan pKdV (1.0) didapati berlaku di dalam suatu manifold simplektik lemah* $(\mathbb{P} = \chi_{s,T}, \omega)$*;*

$$\chi_{s,T} = \left\{ \begin{array}{l} \phi \in \mathcal{H}_T^s \colon \partial_t^j \phi \in \mathcal{H}_T^{s-3\ell} \textit{ bagi } \ell \textit{ sehinggakan, } s - 3\ell \geq 0, \textit{ persisnya} \\ \chi_{s,T} \textit{ ruang fungsi tertakrif pada keseluruhan garis nyata} \\ (-\infty < x < \infty) \textit{ dan menyusut secara pantas pada } \pm\infty \end{array} \right\}$$

suatu manifold Banach $\mathcal{S}^\infty$ dan ω bentuk-2 $\mathcal{S}^\infty$ (secara lemah) pada $\mathbb{P}$ sehinggakan struktur simplektik itu tertakrif menerusi rumus

$$\omega_\phi(v_1, v_2) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\{v_2(x)v_1(y) - v_1(x)v_2(y)\}\,dy\right)dx; \;\; x \in R, \;\; (v_1, v_2) \in T_\phi\mathbb{P}.$$

Jika fungsian $H_j : \mathbb{R}_{H_j} \subset \mathbb{P} \longrightarrow R;\;\; j = 1, 2, 3\ldots$ digantikan dengan kamiran gerakan I_j, iaitu

$$H_j[\phi] \equiv I_j[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} P_j(\phi, \phi_x, \phi_{xx}, \ldots)\,dx; \;\; j = 1, 2, 3, \ldots$$

P_j polinomial kepada kamiran gerakan pKdV, maka medan vektor Hamiltonan bagi H_j, $X_{H_j} : \mathbb{R}_{X_{H_j}} \subset \mathbb{P} \longrightarrow TP|_{R_{X_{H(j)}}}$ yang diwakili oleh

$$X_{H_j}(\phi) = J \cdot G_{P_j} = \partial_x\left(\frac{\delta P_j}{\delta Q}\right);$$

iaitu $J = \partial_x$, $\delta P_j/\delta Q = G_{P_j}$ menandakan kecerunan (atau terbitan Frêchet) polinomial P_j. Tegasnya pKdV boleh ditulis dalam bentuk persamaan Hamilton dalam ruang fungsian kepada fungsi $x \in R$, iaitu $\phi_t = J\,(\delta P_j/\delta Q)$, $\mathbb{R}_{X_H}$ berupa rantau manifold dengan

$$\mathbb{R}_{X_H} = (x \in \mathbb{R}_H | \exists\, v_x \in T_x\mathbb{P} \;\; \textit{sehinggakan} \;\; i_{v_x} \cdot \omega_x(w_x) = \omega_x(v_x, w_x) \;\; \forall \;\; w_x \in T_x\mathbb{R}_H)$$

$X_H(x) = v_x$ dan i_{v_x} hasildarab pendalaman pada $\mathbb{R}_{X_H} \subset \mathbb{R}_H \subset \mathbb{P}$.

Bukti Menurut teorem kewujudan dan keunikan Bona & Smith, wujud penyelesaian unik klasik pKdV, $\phi(\cdot, t) \in \chi_{s,\infty}$ dengan nilai awal tertentu $\phi(\cdot, 0) \in \chi_{s,\infty}$, $s \leq 0$. $\chi_{s,\infty}$ berupa ruang fungsi yang terdiri daripada ruang Banach $\mathcal{H}^s_T = \mathcal{S}([0, T]; \mathbb{H}^s)$, T nombor nyata positif. Oleh sebab [0,T] ialah suatu set padat (menerusi teorem Heine-Borel) dan $\mathcal{H}^s(\Omega)$ ruang Sobolev atas rantau $\Omega \subset R^n$ berupa ruang Banach boleh dimetrik (lihat Adams [2]) dan yang boleh dimodelkan di atasnya suatu manifold Riemannan (lihat Michor [13]). Sayugianya menurut teorem Kahn, $\chi_{s,\infty}$ berupa suatu manifold Banach $\mathcal{S}^\infty$.

Selanjutnya diperlihatkan bahawa pKdV menaja suatu manifold simplektik lemah ($P = \chi_{s,T}, \omega$) dengan menjanakan ω, bentuk-2 $\mathcal{S}^\infty$ (secara lemah) pada $\mathbb{P}$ sehinggakan struktur simplektik itu tertakrif seperti berikut

$$(i_{X_H}\omega)(v) = \omega(X_H(\phi), v), \;\; v \in T_\phi\mathbb{P}, \;\; X_H : \mathbb{R}_H \longrightarrow T\mathbb{P}|_{R_{X_H}},$$

medan vektor, akan tetapi

$$\begin{aligned} \omega(X_H(\phi), v) \;\; &= \;\; \frac{1}{2}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left(v(x)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\partial_y\left(\frac{\delta P_3}{\delta\phi}\right)dy\right]\right)dx\right. \\ &\qquad\qquad \left. - \int_{-\infty}^{\infty}\partial_x\left(\frac{\delta P_3}{\delta\phi}\right)\left[\int_{-\infty}^{\infty}v(y)\,dy\right]dx\right\} \end{aligned}$$

dan menerusi kamiran bahagian demi bahagian diperoleh

$$\begin{aligned} \omega(X_H(\phi), v) \;\; &= \;\; \frac{1}{2}\left\{2\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\delta P_3(x)}{\delta\phi}\right)\cdot v(x)\,dx\right\} \\ &= \;\; (dH)_\phi(v), \end{aligned}$$

yang mengimplikasikan X_H medan vektor Hamiltonan bagi H dengan struktur simplektik ω. Tegasnya, $(\mathbb{P}, \omega, X_H)$ membentuk sistem Hamiltonan bermatra tidak terhingga. Pertimbangan di atas mengambil kira aliran pKdV itu berupa aliran Hamiltonan bersepadan dengan pemilihan salah satu daripada kamiran gerakan itu (lihat Gardner [5] dan Faddeev & Zakharov [4]), I_3 sebagai fungsian Hamiltonan $H = H_3$. Tegasnya peranan H (tenaga) dimainkan oleh I_3:

$$\begin{aligned} H[\phi] = I_3[\phi] &= \int_{-\infty}^{\infty} P_3 \, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\phi^2 + \frac{1}{2}\phi_x^2\right) dx \quad \mathbb{R}_H = \mathcal{H}_T^3, \end{aligned}$$

maka medan vektor Hamiltonan bersekutu dengan H diberikan oleh

$$X_H(\phi) = \partial_x \left(\frac{\delta P_3}{\delta \phi}\right) = \partial_x \left(3\phi^3 - \phi_{xx}\right).$$

iaitu $\Phi_t = 6\phi\phi_x - \phi_{xxx}, \quad \phi_t = J\left(\frac{\delta P_3}{\delta\phi}\right); \quad \mathbb{R}_{X_H} \subset \chi_{s,T}$, iaitu pKdV. □

Kesimpulannya sistem dinamik tajaan pKdV berinteraksi dalam manifold simplektik $(\mathbb{P}, \omega)$ dan berupa sistem Hamiltonan $(\mathbb{P}, \omega, X_H)$ bermatra tidak terhingga. Selanjutnya kita perlihatkan kebolehkamiran sistem dinamik ini secara lengkap. Menurut pertimbangan bergeometri, kebolehkamiran selengkapnya akan sistem Hamiltonan bermatra tidak terhingga $(\mathbb{P}, \omega, X_H)$ itu hanyalah satu implikasi perluasan bermatra kepada suatu sistem Hamiltonan bermatra terhingga yang terkamir selengkapnya (lihat Newell [14]). Oleh itu keputusan berikut memperlihatkan I_j kamiran gerakan bagi sistem pKdV itu berinvolusi; iaitu set kamiran gerakan tidak bersandar itu (yang tidak terhingga banyaknya) memenuhi syarat tanda kurung Poisson- Gardner, khususnya $\{I_j, I_k\} = 0 \ \forall \ j, \ k \in Z_+$.

Berikut diberikan keputusan berkaitan.

Teorem 4 *Sistem dinamik tajaan pKdV (1.0) berupa suatu sistem Hamiltonan bermatra* ∞, $(\mathbb{P}, \omega, X_H)$ *dengan set* $(X_{I_j} | x \in \mathbb{P}, j = 1, 2, \dots)$ *membentuk satu asas bagi* $T_x P$ *dimodelkan pada ruang Banach* $\mathcal{H}_T^s$. *Sistem ini bolehkamir selengkapnya apabila wujud satu jujukan terangkakan fungsian tidak bersandar* $I_j[\phi]$ *pada* $\mathbb{R}_{X_j} \subset \mathbb{P}$; $\phi \in \mathcal{H}_T^s$, *yang berinvolusi terhadap tanda kurung Poisson-Gardner* $\{\cdot, \cdot\}$, *iaitu*

$$\{I_j, I_k\} = 0 \quad \forall \ j, k \in Z_+$$

Bukti Pernyataan pertama Teorem 4 di atas telahpun ditunjukkan dalam Teorem 3. Selanjutnya pertimbangkan tanda kurung Poisson- Gardner bagi dua fungsian $I_j[\phi]$ dan $I_k[\phi]$:

$$\begin{aligned} \{I_j, I_k\} = \omega(X_{I_j}, X_{I_k}) &= \delta I_j(I_k) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G_{P_j}(\phi) X_{I_k}(\phi) \, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G_{P_j} J \, G_{P_k} \, dx. \end{aligned}$$

Terangnya daripada Teorem 3, $I_j[\phi]$ berupa Hamiltonan

$$H_j[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} P_j(\phi, \phi_x, \dots)\, dx; \quad j \in Z_+$$

dan bagi suatu hierarki pKdV $\phi_t = X_{H_j}(\phi) \equiv X_j(\phi)$; iaitu

$$\begin{aligned} X_j(\phi) &= J \cdot G_j = \partial_x \frac{\delta P_j}{\delta \phi} \qquad (G_j \equiv G_{P_j}) \\ &= \mathbb{H} \cdot G_{j-1} \\ &= (a\phi\, \partial_x + \partial_x \cdot \phi + b\, \partial_x^3) \frac{\delta P_{j-1}(\phi)}{\delta \phi} \\ &= (a\phi + a\, \partial_x \cdot \phi\, \partial_x^{-1} + b\, \partial_x^2)\, X_{j-1}(\phi), \end{aligned}$$

menerusi hubungan rekursi Lenard (lihat Gardner [5]) dengan $\mathbb{H}$ pengoperasi antisimetri peringkat ke-3, $\mathbb{H} = a\phi\, \partial_x + \partial_x \cdot \phi + b\, \partial_x^3$ Bagi pKdV (1.0) berpemalarkan $a = 2$, $b = -1$; maka

$$G_3 = 3\phi^2 - \phi_{xx}, \quad X_3(\phi) = 6\phi\phi_x - \phi_{xx} \equiv X_H(\phi) \quad \text{dan} \quad H_3 \equiv H$$

. Selanjutnya diperihalkan $\{H_j, H_k\} = 0\ \forall\ j, k \in Z_+$, khususnya ini mengimplikasikan kesemua H_j kamiran gerakan pKdV berinvolusi terhadap tanda kurung Poisson-Gardner:

$$\begin{aligned} \{H_j, H_k\} = \omega(X_j, X_k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta P_j}{\delta \phi}\, X_k(\phi)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta P_j}{\delta \phi} (a\phi\partial_x + \partial_x \cdot \phi + b\, \partial_x^3)\, \frac{\delta P_{k-1}}{\delta \phi}\, dx \end{aligned}$$

pengamiran bahagian demi bahagian menghasilkan

$$\begin{aligned} &= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta P_{k-1}}{\delta \phi} X_{j+1}(\phi)\, dx \\ &= -\omega(X_{k-1}, X_{j+1}) \\ &= \omega(X_{j+1}, X_{k-1}) \\ &= \{H_{j+1}, H_{k-1}\} \end{aligned}$$

Penggunaan berturut-turut hubungan $\{H_j, H_k\} = \{H_{j+1}, H_{k-1}\}$ jelas menunjukkan jika $j = 2i + 1$, $k = 2l + 1$; iaitu

$$\{H_j, H_k\} = \{H_{i+\ell+1}, H_{i+\ell+1}\} = 0, \quad \text{bagi} \quad \ell = i + 1$$

jika $j = 2i$, $k = 2\ell$; iaitu

$$\{H_j, H_k\} = \{H_{i+\ell}, H_{i+\ell}\} = 0, \quad \text{bagi} \quad \ell = i + 1$$

jika $j = 2i + 1$, $k = 2\ell$; iaitu

$$\{H_j, H_k\} = \{H_{i+\ell}, H_{i+\ell+1}\} = \{H_{i+\ell+1}, H_{i+\ell}\}, \quad \text{bagi} \quad \ell = i + 1$$

melalui sifat antisimetri $\{\cdot, \cdot\}$. Hal ini mengimplikasikan $\{H_j, H_k\} = 0$, $\forall j, k \in Z$ yang memastikan kebolehkamiran sistem dinamik tajaan pKdV itu. $\square$

4 Ulasan dan Implikasi Keputusan

Sebenarnya fakta pKdV sebagai sistem Hamiltonan bermatra tidak terhingga yang memiliki set kamiran gerakan yang berinvolusi, dipercayai ramai (lihat Abraham & Marsden [1], Mckean [11]) berhubungan rapat dengan kehadiran soliton-soliton bersifat abadi yang mengalami interaksi dua jasad. Jika set kamiran gerakan itu tidak berinvolusi, dipercayai akan berlaku interaksi n jasad atau lebih.

Evolusi penyelesaian ϕ bagi pKdV sememangnya berisospektrum (spektrum sepadan tidak varian terhadap t) sehinggakan setiap evolusi X_j berisospektrum (lihat Lax [10]). Oleh itu ternyata ada dua jenis kuantiti abadi berbeza bagi pKdV : kamiran gerakannya $I_j[\phi]$ dan nilai eigen $\lambda_j(\phi)$ kepada pengoperasi Schrdingernya. Mckean & Moerbeke [12] membuktikan bahawa I_j dan λ_j bersandar; iaitu bagi j besar, I_j boleh dihubungkan dengan gelagat asimptot λ_j. Berikut diperlihatkan λ_j, $j \in Z_+$ membentuk suatu set involusi seperti mana halnya I_j, dan sesungguhnya juga I_j (atau H_j) dan λ_j adalah berinvolusi terhadap tanda kurung Poisson-Gardner:

$$
\begin{aligned}
\{\lambda_i, \lambda_j\} &= \int_{-\infty}^{\infty} G_{\lambda_i}\, \partial_x\, G_{\lambda_j}\, dx, \qquad G_\lambda \quad \text{kecerunan } \lambda, \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_i^2 \partial_x \psi_j^2\, dx, \qquad \begin{array}{l}\psi \text{ fungsi eigen pengoperasi} \\ \text{Schrödinger}\end{array} \\
&= (4\lambda_j)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_i^2\, \mathbb{H}\, \psi_j^2\, dx \\
&= -(4\lambda_j)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{H}\, \psi_i^2\, \psi_j^2\, dx \\
&= -\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right) \int_{-\infty}^{\infty} G_{\lambda_j} \partial_x G_{\lambda_i}\, dx \\
&= -\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right) \{\lambda_j,\, \lambda_i\}
\end{aligned}
$$

iaitu $(\lambda_j - \lambda_i)\{\lambda_i, \lambda_j\} = 0$. Andaian λ tidak merosot mengimplikasikan $\{\lambda_i, \lambda_j\} = 0 \quad \forall j, k \in Z_+$. Secara sepadan, bagi medan vektor Hamiltonan

$$
\begin{aligned}
X_{j+1} &= \mathbb{H}\, \frac{\delta P_j}{\delta \phi} \\
\{H_j, \lambda_k\} &= \int_{-\infty}^{\infty} G_{H_j} \partial_x G_{\lambda_k}\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta P_j}{\delta \phi} \partial_k \psi_k^2\, dx \\
&= -(4\lambda_k)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\mathbb{H} \frac{\delta P_j}{\delta \phi}\right) \psi_k^2\, dx \\
&= -(4\lambda_k)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} X_{j+1} G_{\lambda_k}\, dx \\
&= -(4\lambda_k)^{-1} \{H_{j+1}, \lambda_k\}
\end{aligned}
$$

Oleh sebab bagi $j = 1$, $j = 2$ masing-masingnya didapati:

$$H_1 = \int_{-\infty}^{\infty} P_1\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi\, dx, \qquad H_2 = \int_{-\infty}^{\infty} P_2\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\phi^2/2)\, dx;$$

$$\{H_1, \lambda_k\} = \{H_2, \lambda_k\} = 0,$$

maka

$$\{H_j, \lambda_k\} = 0 \quad \forall\ j, k \in Z_+.$$

Terangnya telah diperlihatkan bahawa kesemua λ_j bagi pKdV dan sama halnya H_j dan λ_k berinvolusi terhadap tanda kurung Poisson- Gardner.

5 Kesimpulan

Teorem 3 dan 4 mempamerkan sistem dinamik tajaan pKdV itu sebagai sistem Hamiltonan bermatra tidak terhingga $(\mathbb{P}, \omega, X_H)$ dan mendedahkan kebolehkamiran sistem itu secara lengkap. Kami berhasrat untuk mempamerkan hal yang serupa bagi kasus sistem dinamik tajaan persamaan Schrödinger tidak linear dan persamaan Sinus-Gordon.

Rujukan

[1] R. Abraham & J.E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, Edisi kedua, Benjamin-Cummings, Reading, (1978).

[2] R.A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, (1975).

[3] J.L. Bona dan R. Smith, *The initial-value problem for the Korteweg-de Vries equation*, Phil. Trans. R. Soc. Lond., A278 (1975), 1-16.

[4] L.D Faddeev dan V.E. Zakharov, *Korteweg-de Vries equation : A completely integrable Hamiltonian system*, Funct. Anal. Appl., 5 (1971), 280-287.

[5] C.S. Gardner, *The Korteweg-de Vries equation and generalizations, IV, The Korteweg-de Vries equation as a Hamiltonian system*, J. Math. Phys., 12 (1971), 1548-1551.

[6] E. van Groesen dan E.M. de Jager, *Mathematical Structures in Continuous Dynamical Systems*, North Holland, Amsterdam, 1994.

[7] T. Jamalludin dan A.A. Zainal, *Gelombang menyerak*, Buletin Fizik (UTM), 2 (1990), 8-13.

[8] R. Jost, *Poisson brackets (an unpedagogigal lecture)*, Rev. Mod. Phys., 36 (1964), 572-579.

[9] D.W. Kahn, *Introduction to Global Analysis*, Academic Press, New York, 1980.

[10] P.D. Lax, *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves*, Commun. Pure Appl. Math., 21 (1968), 441-456.

[11] H.P. Mckean, *Integrable systems and aigebraic curves, dalam Global Analysis*, M. Grmela & J.E. Marsden, pyt., Lecture Notes in Mathematics, no 755, 83-200, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[12] H.P. Mckean dan P. van Moerbeke, *The spectrum of Hill's equation*, Invent. Math., 30 (1975), 217-274.

[13] P.W. Michor, *Manifolds of Differentiable Mappings*, Shiva Pub., Kent, 1980.

[14] A.C. Newell, *Solitons in Mathematics and Physics*, Siam, New York, 1985.

[15] A.A. Zainal, *Soliton-soliton : Persamaan Korteweg-de Vries, Sinus-Gordon, Schrödinger Kubik I*, Matematika (UTM), 2 (1986), 55- 82. Ralat 3 (1987), 117.

[16] A.A. Zainal, *Soliton-soliton : Masalah penyebaran songsang II*, Matematika (UTM), 3 (1987), 73-101.