MATEMATIKA, 2005, Jilid 21, Bil. 1, hlm. 79–88

Penyelesaian Gelombang Solitari: Kaedah Analisis Painlevé Invarian dan Sistem Persamaan Riccati Terlurus dengan Pekali Pembolehubah
(Solitary Wave Solutions: Method of Invariant Painlevé Analysis and Linearised Riccati System of Equations with Variable Coefficients)

[1] Jusoh Yacob & [2] Mohd Nor Mohamad

[1] Universiti Teknologi MARA, Kampus Machang
Bukit Ilmu, 18500 Machang, Kelantan DN

[2] Jabatan Matematik, Fakulti Sains Universiti Teknologi Malaysia
81310 UTM Skudai, Johor DT

Abstrak Kaedah baru untuk memperolehi penyelesaian gelombang solitari bagi persamaan evolusi tak linear diselidiki. Kaedah analisis Painlevé invarian dan sistem persamaan Riccati terlurus dengan pekali pembolehubah, ringkasnya APIRTP adalah kaedah yang berasaskan manifold singular. Ungkapan manifold singular yang dinyatakan sebagai terbitan Schwarzian S menjadi pekali pembolehubah bagi sistem persamaan Riccati. Dengan menggunakan kaedah APIRTP kembangan penyelesaian terpangkas dan seterusnya penyelesaian gelombang solitari persamaan KdV dan HKdV diperolehi.

Katakunci Kaedah APIRTP, manifold singular, sistem persamaan Riccati, kembangan penyelesaian terpangkas, penyelesaian soliton, persamaan KdV dan HKdV.

Abstract *A new method to find solitary wave solutions of the nonlinear evolutions is investigated. The method of invariant Painlevé analysis and linearised Riccati system of equations with variable coefficients, abbreviated as APIRTP is a method based on singular manifold analysis. The expressions of the singular manifold are simplified in the form of Schwarzian derivative S. S is a variable coefficient of the Riccati equations. By using the APIRTP method, the truncated solution expansions and solitary wave solutions of the KdV and HKdV equations are obtained.*

Keywords *APIRTP method, singular manifold, Riccati equation system, truncated solution expansion, soliton solution, KdV and HKdV equations.*

1 Pendahuluan

Weiss, Tabor & Carnevale (WTC) [7] telah memperkenalkan kaedah ujian bagi mengkaji sifat Painlevé persamaan pembezaan separa atau persamaan evolusi tak linear (PET). Kaedah ini dikenali sebagai kaedah WTC. Daripada kaedah ini diperoleh kembangan penyelesaian terpangkas dan seterusnya penyelesaian gelombang solitari bagi persamaan evolusi boleh diperolehi. Penyelesaian bagi PET berasaskan kepada fungsi pembolehubah kompleks yang dinamakan manifold singular ϕ. PET dikatakan mempunyai sifat Painlevé apabila kesemua kesingularan adalah bernilai tunggal (kutub mudah) (Ince [3]).

Kaedah WTC ini telah diringkas oleh Conte [1, 2]. Beliau telah memperkenalkan kaedah analisis Painlevé invarian (API). Kaedah API berasaskan kepada pemboleh kembangan χ yang dikaitkan dengan manifold singular ϕ. Dengan kaedah API, manifold singular ϕ boleh dinyatakan sebagai ungkapan terbitan Scwarzian S dan C dan menepati sistem persamaan Riccati. Seterusnya penyelesaian gelombang solitari bagi PET boleh diperolehi dengan mengambil S dan C sebagai pemalar.

Dalam makalah ini, kami meluaskan kajian terhadap kaedah API dengan mempertimbangkan sistem persamaan Riccati terlurus dengan pekali pembolehubah ringkasnya, APIRTP. Dengan kaedah APIRTP penyelesaian gelombang solitari bagi PET juga boleh diperolehi apabila mengambil nilai S sebagai pembolehubah. Dengan perkataan lain, pekali persamaan Riccati terlurus adalah pembolehubah.

Penulisan makalah ini disusun seperti berikut. Dalam Bahagian 2 dibincangkan teori umum kaedah APIRTP. Manakala prosedur menggunakan kaedah APIRTP dimuatkan dalam Bahagian 3. Perbincangan penyelesaian gelombang solitari bagi persamaan KdV dan HKdV dimuatkan dalam Bahagian 4 dan 5. Bahagian akhir ialah kesimpulan.

2 Teori Umum Kaedah APIRTP

Kaedah WTC yang diperkenalkan oleh Weiss, Tabor & Carnevale (WTC) [7] adalah berasaskan singular manifold ϕ. PET dikatakan mempunyai sifat Painlevé jika penyelesaian bagi PET tersebut bernilai tunggal terhadap kesingularan manifold ϕ. Kaedah WTC dijelaskan secara ringkas seperti berikut. Kesingularan manifold ditentukan oleh

$$\phi(x_1, x_2, \ldots, x_2) = 0 \tag{1}$$

dan penyelesaian bagi PET disekitar manifold singular diandaikan sebagai [7]

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} u_j \phi^{j-\alpha} \tag{2}$$

dengan $\phi = \phi(x_1, x_2, \ldots, x_2)$, $u_j = u_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ adalah analitik disekitar manifold (1) dan α dinamakan kuasa sebutan pelopor dan integer positif. Nilai α ditentukan dengan menggantikan sebutan pelopor $u_0\phi^{-\alpha}$ kedalam PET. Seterusnya dengan menggantikan (2) ke dalam PET serta menyelesaikannya diperolehi kembangan penyelesaian terpangkas (KPT). Daripada KPT akhirnya diperoleh penyelesaian gelombang solitari.

Conte [1, 2] telah memperkenalkan pembolehubah kembangan $\chi(x,t)$

$$\chi = \left(\frac{\phi_x}{\phi} - \frac{\phi_{xx}}{2\phi_x}\right)^{-1} \tag{3}$$

dan penyelesaian bagi PET disekitar manifold singular diandaikan sebagai

$$v = \sum_{j=0}^{\infty} u_j \chi^{j-\alpha}, \tag{4}$$

dengan α ialah integer positif. Beliau telah membuktikan bahawa pembolehubah χ menepati sistem persamaan Riccati

$$\chi_x = 1 + \frac{1}{2} S \chi^2, \tag{5}$$

$$\chi_t = -C + C_x \chi - \frac{1}{2} \left(C_{xx} + SC \right) \chi^2, \tag{6}$$

dengan S dan C adalah terbitan Schwarzian dan diberi oleh

$$S = \frac{\phi_{xxx}}{\phi_x} - \frac{3}{2} \left(\frac{\phi_{xx}}{\phi_x} \right)^2, \tag{7}$$

$$C = \frac{\phi_t}{\phi_x}. \tag{8}$$

Mugan & Jrad [4] menyatakan bahawa persamaan Riccati merupakan persamaan terbitan tertib pertama yang memiliki sifat Painlevé.

Penyelesaian persamaan (5) dan (6) diperoleh sebagai

$$\chi = \frac{k}{2} \tanh \frac{k}{2} (x - ct), \tag{9}$$

apabila memilih $S = -\frac{1}{2} k^2$ dan $C = c$, dengan k dan c adalah pemalar.

Sekarang sistem persamaan Riccati dengan pekali pembolehubah diperoleh seperti berikut. Pertimbangkan jelmaan

$$\chi = \frac{\xi}{\varphi_x}, \tag{10}$$

dengan ξ mempunyai sifat yang sama seperti fungsi χ manakala fungsi $\varphi_x = \varphi_x(x,t)$ dan $\varphi_x \neq 0$. Dengan menggantikan persamaan (10) ke dalam (5) dan (6) diperoleh

$$\xi_x = \varphi_x + \frac{\varphi_{xx}}{\varphi_x} \xi + \frac{1}{2} \frac{S}{\varphi_x} \xi^2 \tag{11}$$

$$\xi_t = C_x \xi - C \varphi_x + \frac{\varphi_{xt}}{\varphi_x} - \frac{1}{2\varphi_x} \left(C_{xx} + SC \right) \left(\frac{\xi}{\varphi_x} \right)^2. \tag{12}$$

Dengan memilih

$$\varphi_{xx} = 0, \tag{13}$$

$$S = 2\kappa \varphi_x^2, \tag{14}$$

persamaan (11) menjadi

$$\xi_x = \varphi_x + \kappa \varphi_x \xi^2. \tag{15}$$

Seterusnya dengan saling menukar x dan t pada sebutan tertentu dan memilih $\varphi_t = \varphi_x$, persamaan (12) menjadi

$$\xi_t = \varphi_t + \kappa\varphi_t\xi^2. \tag{16}$$

Pemilihan $\varphi_t = \varphi_x$, mengimplikasikan $C = -1$. Yan [8] menamakan persamaan (15) dan (16) sebagai sistem persamaan Riccati dengan pekali pembolehubah.

Seterusnya daripada persamaan (4) dan (10) diperoleh kembangan penyelesaian terpangkas

$$u = \sum_{j=0}^{\alpha} u_j \left(\frac{\varphi_x}{\xi}\right)^{-j+\alpha}. \tag{17}$$

Persamaan Riccati (15) dan (16) diteluruskan dengan jelmaan

$$\xi = \frac{\zeta}{\zeta_x}\varphi_x \tag{18}$$

yang menghasilkan

$$\zeta_{xx} = -\kappa\varphi_x^2\zeta \qquad \text{dan} \qquad \zeta_t = \zeta_x. \tag{19}$$

Daripada persamaan (17) dan (18) diperoleh kembangan penyelesaian terpangkas dalam sebutan ζ diberi oleh

$$u = \sum_{j=0}^{\alpha} u_j \left(\frac{\zeta_x}{\zeta}\right)^{-j+\alpha}. \tag{20}$$

Penyelesaian bagi sistem persamaan Riccati (19) diberi oleh

$$\zeta = A \text{ eksp}\,(\varphi) + B \text{ eksp}\,(-\varphi), \tag{21}$$

dengan A dan B pemalar dan $\kappa = -1$. Keputusan ini memberikan

$$\frac{\zeta_z}{\zeta} = \varphi_x(x,t) \tanh \varphi(x,t) \tag{22}$$

atau

$$\frac{\zeta_z}{\zeta} = \varphi_x(x,t) \text{ koth } \varphi(x,t). \tag{23}$$

Dalam kes ini, dipilih $B = -A$. Daripada persamaan (13) dan $\varphi_t = \varphi_x$ memberikan

$$\varphi = k(x+t), \tag{24}$$

dengan k pemalar.

3 Prosedur Kaedah APIRTP

Dalam bahagian ini dibincangkan prosedur menggunakan kaedah APIRTP. Langkah–langkah yang perlu diikuti adalah seperti berikut.

Langkah pertama Menentukan kuasa sebutan pelopor, α. Nilai α ditentukan dengan kaedah analisis tertib pelopor, iaitu menggantikan sebutan pelopor $v_0\left(\frac{\zeta_x}{\zeta}\right)^{\alpha}$ ke dalam persamaan evolusi tak linear. Seterusnya, nilai α diperoleh dengan mengimbangi kuasa sebutan dominan daripada sebutan tak linear dan serakan peringkat tertinggi.

Langkah kedua Menentukan kembangan Painlevé terpangkas. Apabila nilai α dalam Langkah pertama diketahui, kembangan penyelesaian boleh ditentukan daripada (20). Dengan menggantikan kembangan ini dan persamaan (19) ke dalam persamaan evolusi tak linear, maka diperoleh persamaan dalam sebutan $\left(\frac{\zeta_x}{\zeta}\right)^{-j+\beta}$, dengan $\beta = \alpha + n$, n ialah tertib PET dan $j = 0, 1, 2, \ldots,$. Proses pengiraan ini boleh dilakukan dengan menggunakan perisian Maple 8. Persamaan terlebih tentu diperoleh dengan menyamakan pekali–pekali $\left(\frac{\zeta_x}{\zeta}\right)^{-j+\beta}$ dengan sifar.

Langkah ketiga Menentukan penyelesaian gelombang solitari. Nilai u_j, $j = 0, 1, 2, \ldots, \alpha$, boleh ditentukan dengan menyelesaikan persamaan terlebih tentu yang diperoleh daripada Langkah kedua. Penyelesaian gelombang solitari boleh diperoleh dengan menggantikan persamaan (22) ke dalam kembangan penyelesaian terpangkas tersebut. Manakala penyelesian gelombang solitari singular diperoleh daripada persamaan (23).

4 Penyelesaian Gelombang Solitari bagi Persamaan KdV

Pertimbangkan persamaan KdV

$$u_t + auu_x + bu_{xxx} = 0, \tag{25}$$

dengan a dan b adalah pemalar. Nilai kuasa sebutan pelopor $\alpha = 2$ (Musette & Conte [5]). Oleh itu, kembangan penyelesaian diberi oleh

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} u_j \left(\frac{\zeta_x}{\zeta}\right)^{-j+2}. \tag{26}$$

Dengan menggantikan persamaan (26) dan (19) ke dalam persamaan (25) diperoleh persamaan terlebih tentu dalam sebutan $\left(\frac{\zeta_x}{\zeta}\right)^{-j+4}$ apabila nilai–nilai j seperti berikut:

$$\begin{aligned}
j = 0: \quad & -2au_0^2 - 2bu_0 = 0, && (27)\\
j = 1: \quad & -3au_0u_1 - 6bu_1 + au_0u_{0,x} + 18bu_{0,x} = 0, && (28)\\
j = 2: \quad & -2u_0 - au_1^2 + 2au_0^2\varphi_x^2 - 6bu_{0,xx} + au_0u_{0,x}\\
& -2au_0u_2 + 6bu_{1,x} + 40bu_0\varphi_x^2 + au_1u_{0,x} = 0. && (29)
\end{aligned}$$

Penyelesaian persamaan (27)–(29) diberi oleh

$$u_0 = -\frac{12b}{a}, \quad u_1 = 0, \qquad u_2 = -\frac{1}{a} + \frac{8b}{a}\varphi_x^2. \tag{30}$$

Daripada persamaan (26), (30) dan (22) diperoleh penyelesaian soliton bagi persamaan KdV sebagai

$$u = -\frac{3}{a}\,\text{sekh}^2\,\varphi(x,t), \tag{31}$$

dengan

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{-b}}\,x + f(t). \tag{32}$$

Oleh kerana $\varphi_x(x,t) = \varphi_t(x,t)$ maka $f(t) = \frac{1}{2\sqrt{-b}}\,t$ dan akhirnya persamaan (32) menjadi

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{-b}}\,(x+t)\,, \quad b < 0. \tag{33}$$

Apabila persamaan (23) digantikan ke dalam persamaan (26) diperoleh penyelesaian gelombang solitari singular bagi persamaan KdV diberi oleh

$$u = -\frac{3}{a}\,\text{koth}^2\,\varphi(x,t), \tag{34}$$

5 Penyelesaian Gelombang Solitari bagi HKdV

Pertimbangkan persamaan HKdV

$$u_t + auu_x + bu_{xxx} + du_{xxxxx} = 0, \tag{35}$$

dengan a, b dan d pemalar. Kuasa sebutan pelopor di peroleh sebagai $\alpha = 4$ (Kudryashov [6]). Dengan ini, kembangan penyelesaian diberi oleh

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} u_j \left(\frac{\zeta_x}{\zeta}\right)^{-j+4}. \tag{36}$$

Gantikan persamaan ini, persamaan (19) ke dalam persamaan (36) diperoleh persamaan terlebih tentu dalam sebutan $\left(\frac{\zeta_x}{\zeta}\right)^{-j+4}$ apabila nilai–nilai j seperti berikut:

$j = 0$:

$$-6720du_0 - 4au_0^2 = 0, \tag{37}$$

$j = 1$:

$$-2520du_1 - 7au_0u_1 + 4200du_0 + au_0u_{0,x} = 0, \tag{38}$$

$j = 2$:

$$\begin{aligned} &a\,u_1\,u_{0,x} - 120\,b\,u_0 - 720\,d\,u_2 - 3\,a\,{u_1}^2 + 19200\,d\,u_0\,{\varphi_x}^2 + 1800\,d\,u_{1,x} \\ &\qquad + 4\,a\,{u_0}^2\,{\varphi_x}^2 + a\,u_0\,u_{1,x} - 6\,a\,u_0\,u_2 - 1200\,d\,u_{0,xx} = 0, \end{aligned} \tag{39}$$

$j = 3$:

$$\begin{aligned} &-60\,b\,u_1 + a\,u_1\,u_{1,x} - 120\,d\,u_3 + 600\,d\,u_{2,x} - 10400\,d\,u_{0,x}\,{\varphi_x}^2 + 60\,b\,u_{0,x} \\ &\quad - 600\,d\,u_{1,xx} - 5\,a\,u_0\,u_3 - 5\,a\,u_1\,u_2 + 6600\,d\,u_1\,{\varphi_x}^2 + 7\,a\,u_0\,u_1\,{\varphi_x}^2 + 200\,d\,u_{0,xxx} \\ &\qquad + a\,u_2\,u_{0,x} + a\,u_0\,u_{2,x} = 0, \end{aligned} \tag{40}$$

$j = 4$:

$$\begin{aligned} a\,u_2\,u_{1,\,x} + a\,u_0\,u_{3,\,x} + a\,u_3\,u_{0,\,x} - 12\,b\,u_{0,\,xx} + a\,u_1\,u_{2,\,x} + 120\,d\,u_{1,\,xxx} - 240\,d\,u_{2,\,xx} \\ - 2\,a\,{u_2}^2 - 4\,a\,u_1\,u_3 - 4\,u_0 + 2480\,d\,u_{0,\,xx}\,{\varphi_x}^2 + 1680\,d\,u_2\,{\varphi_x}^2 + 120\,d\,u_{3,\,x} \\ + 248\,b\,u_0\,{\varphi_x}^2 + 3\,a\,{u_1}^2\,{\varphi_x}^2 - 19264\,d\,u_0\,{\varphi_x}^4 - 4\,a\,u_4\,u_0 - 4080\,d\,u_{1,\,x}\,{\varphi_x}^2 \\ + 6\,a\,u_0\,u_2\,{\varphi_x}^2 + 36\,b\,u_{1,\,x} - 20\,d\,u_{0,\,xxxx} - 24\,b\,u_2 = 0. \end{aligned} \tag{41}$$

Penyelesaian persamaan (37)–(40) diberi oleh

$$u_0 = -\frac{1680d}{a}, \tag{42}$$

$$u_1 = 0, \tag{43}$$

$$u_2 = \frac{2240d\varphi_x^2}{a} - \frac{280b}{13a}, \tag{44}$$

$$u_3 = 0. \tag{45}$$

Seterusnya daripada persamaan (41) diperoleh

$$u_4 = \frac{31\,b^2}{507\,a\,d} + \frac{560}{39}\,\frac{b\,{\varphi_x}^2}{a} - \frac{1568}{3}\,\frac{d\,{\varphi_x}^4}{a} - \frac{1}{a}. \tag{46}$$

Akhirnya kembangan penyelesaian pada aras sebutan tetap diperoleh sebagai

$$\begin{aligned} u = -\frac{1680d}{a}\left(\frac{\zeta_x}{\zeta}\right)^4 - \left(\frac{2240d\varphi_x^2}{a} + \frac{280b}{13a}\right)\left(\frac{\zeta_x}{\zeta}\right)^2 \\ + \frac{31\,b^2}{507\,a\,d} + \frac{560}{39}\,\frac{b\,{\varphi_x}^2}{a} - \frac{1568}{3}\,\frac{d\,{\varphi_x}^4}{a} - \frac{1}{a}. \end{aligned} \tag{47}$$

Persamaan ini akan diguna untuk mendapatkan penyelesaian persamaan HKdV. Kaedah APIRTP akan digunakan beserta dengan kembangan terpangkas pada dan sebelum sebutan tetap.

5.1 Kembangan Terpangkas pada Aras sebutan Tetap

Dengan menggantikan persamaan (22) ke dalam persamaan (47) memberikan

$$\begin{aligned} u = -\frac{1680d\varphi_x^4}{a}\,\mathrm{sekh}^4\,\varphi(x,t) + \left(\frac{1120d\varphi_x^4}{a} + \frac{280b\varphi_x^2}{13a}\right)\mathrm{sekh}^2\,\varphi(x,t) \\ + \frac{112d\varphi_x^4}{3a} - \frac{1}{a} + \frac{31b^2}{507ad} - \frac{280b\varphi_x^2}{39a}. \end{aligned} \tag{48}$$

Seterusnya dengan memilih

$$\varphi_x = \frac{\sqrt{-13bd}}{26d}, \quad bd < 0 \tag{49}$$

persamaan (48) menjadi

$$u = -\frac{105b^2}{169ad}\,\mathrm{sekh}^4\,\varphi(x,t) + \frac{36b^2}{169ad} - \frac{1}{a}, \tag{50}$$

dan

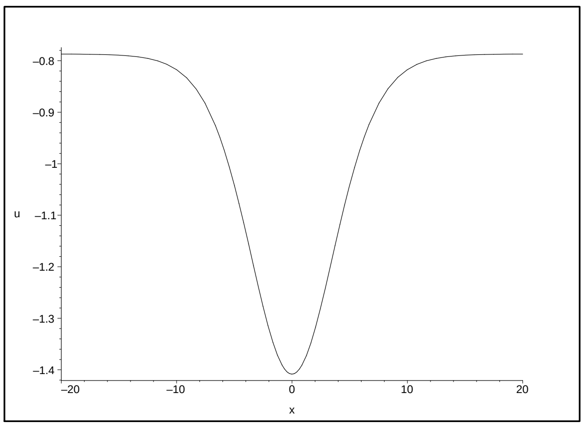
$$\varphi(x,t) = \frac{\sqrt{-13bd}}{26d}\,(x+t)\,. \tag{51}$$

Apabila mengambil $d = \frac{36b^2}{169}$, persamaan (50) menjadi

$$u = -\frac{35}{12}\,\text{sekh}^4\,\varphi(x,t), \tag{52}$$

dengan $b < 0$.

Profil gelombang bagi penyelesaian (50) ditunjukkan dalam Rajah 1.



Rajah 1: Penyelesaian gelombang solitari bagi persamaan HKdV apabila $a = -1$, $b = -1$ dan $d = -1$ dan $t = 0$.

5.2 Kembangan Terpangkas Sebelum Aras Sebutan Tetap

Daripada persamaan (47), diperoleh kembangan terpangkas sebelum aras sebutan tetap diberi oleh

$$u = -\frac{1680d}{a}\left(\frac{\zeta_x}{\zeta}\right)^4 - \left(\frac{2240d\varphi_x^2}{a} + \frac{280b}{13a}\right)\left(\frac{\zeta_x}{\zeta}\right)^2. \tag{53}$$

Dengan menggantikan persamaan (22) ke dalam persamaan (53) diperoleh

$$\begin{aligned} u = &-\frac{1680d\varphi_x^4}{a}\,\text{sekh}^4\,\varphi(x,t) + \left(\frac{1120d\varphi_x^4}{a} + \frac{280b\varphi_x^2}{13a}\right)\text{sekh}^2\,\varphi(x,t) \\ &+ \frac{560d\varphi_x^4}{a} - \frac{280b\varphi_x^2}{13a}. \end{aligned} \tag{54}$$

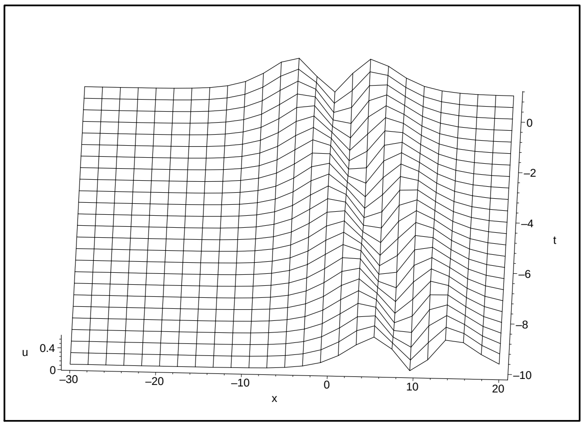
Seterusnya, dengan memilih

$$\varphi = \frac{\sqrt{26bd}}{26d}\,(x+t) \tag{55}$$

persamaan (54) menjadi

$$u = \frac{420b^2}{169ad}\left[\text{sekh}^2\left(\frac{\sqrt{126bd}}{26d}\,(x+t)\right) - \text{sekh}^4\left(\frac{\sqrt{126bd}}{26d}\,(x+t)\right)\right]. \tag{56}$$

Profil gelombang bagi penyelesaian (56) ditunjukkan oleh Rajah 2.



Rajah 2: Penyelesaian gelombang solitari bagi persamaan (56) apabila $a = 1$, $b = 1$ dan $d = 1$.

6 Kesimpulan

Kaedah APIRTP untuk mendapatkan penyelesaian gelombang solitari bagi PET telah dibincangkan. Kaedah APIRTP ini berasaskan analisis Painlevé dan menggunakan sistem persamaan Riccati terlurus dengan mengandaikan S pembolehubah dan $C = -1$. Dengan menggunakan kaedah APIRTP, diperoleh penyelesaian gelombang solitari bagi persamaan KdV dan HKdV.

Rujukan

[1] R. Conte, *Universal Invariant Properties of Painlevé Analysis and Bäcklund Transformation in Nonlinear Partial Differential Equations,* Phys. Lett. A 134(1988), 100-104.

[2] R. Conte, *Invariant Painlevé Analysis of Partial Differential Equations,* Phys. Lett. A 140(1989), 383-390.

[3] E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations,* Dover, NY(1956).

[4] U. Mugan and F. Jrad, *Painlevé Test and Higher Order Differential Equations,* J. Nonlinear Math. Phys. 9(2002), 282–310.

[5] M. Musette & R. Conte, *The Two–singular–manifold Method:I. Modified Korteweg-de Vries and Sine-Gordon Equations,* J. Phys. A; Math Gen. 27(1994), 3895-3913.

[6] N. A. Kudryshov, *On Types of Nonlinear Nonintegrable Equations with Exact Solutions,* Phys. Lett. A 155(1991), 269-275.

[7] J. Weiss, M. Tabor & G. Carnevale, *Painlevé Property for Partial Differential Equations,* J. Math. Phys. 24(1983),522-626.

[8] Z. Yan, *The Riccati Equation with Variable Coefficient Expansion Algorithm to Find More Exact Solutions of Nonlinear Differential Equations,* J. Nonlinear Math. Phys. 7(2003), 1–13.