MENCUNGKIL KESIRATAN MOMEN GEOMETRI TAKUBAH TERHADAP PENGEKSTRAKAN FITUR

Maslina Darus[1] & Siti Mariyam Hj. Shamsuddin[2]

Soft Computing and Mathematical Technology Research Group
Jabatan Matematik, Fakulti Sains dan Teknologi, UKM[1]
Jabatan Grafik dan Multimedia, Fakulti Sains Komputer dan Sistem Maklumat, UTM[2]

Abstrak

Fungsi momen merupakan salah satu kaedah yang banyak digunakan dalam proses pengekstrakan imej seperti pengecaman pola, pengkelasan objek, pengkodan imej dan penaksiran imej. Penghitungan bagi set momen adalah berdasarkan kepada imej digital. Pada umumnya, imej ini menggambarkan secara global ciri dan kepelbagaian fitur imej secara geometri. Oleh yang sedemikian, teknik momen dipergunakan secara meluas dalam bidang sains komputer dan robotik. Namun begitu, terdapat penyelidik yang mengunakan kaedah momen geometri takubah tidak begitu celik tentang konsep secara teori yang tersirat di dalam kaedah ini. Justru itu, kertas kerja ini bertujuan mengupas intipati tersirat teknik momen geometri takubah ke dalam bentuk olahan yang boleh difahami dengan jelas.

1.0 Pengenalan

Momen geometri adalah salah satu fungsi momen dengan fungsi inti ditakrifkan sebagai hasil darab koordinat piksel (M.K.Hu., 1962). Dengan menggunakan momen geometri, koordinat penjelmaan bagi imej mudah untuk diungkap dan dianalisa berdasarkan kepada penjelmaan dalam ruang momen. Fungsi momen geometri adalah takubah terhadap satah imej penjelmaan. Momen geometri banyak digunakan dalam pengecaman imej, dan dikenali juga sebagai momen kartesan atau momen biasa.

Momen geometri ditakrifkan dengan set asas $\{x^p, y^q\}$. Momen geometri dua dimensi bagi tertib $(p+q)^{th}$ ditandakan sebagai m_{pq} , dan diungkap seperti berikut:

$$m_{pq} = \iint_{\delta} x^p y^q f(x,y)\,dxdy \; \mathrm{x^p y^q} \; ; \quad \mathrm{p,q} = 0,1,2,\ldots \qquad (1),$$

dengan δ adalah rantau ruang piksel dengan fungsi kepadatan $f(x,y)$ tertakrif (R.Mukundan *et. al*, 1998).

1.1 Teorem unik: Dengan andaian bahawa kepadatan fungsi $f(x,y)$ adalah selanjar cebis demi cebis dan terbatas dalam rantau δ, maka jujukan momen $\{m_{pq}\}$ adalah unik dan ditentukan oleh kepadatan fungsi $f(x,y)$ dan sebaliknya.

1.2 Teorem kewujudan: Dengan andaian bahawa kepadatan fungsi $f(x,y)$ adalah selanjar cebis demi cebis dan terbatas di dalam rantau δ, maka momen m_{pq} bagi semua tertib wujud dan terhingga.

Momen geometri daripada jenis berlainan mempunyai ruang cirian yang berbeza bagi setiap taburan kecerahan imej. Set momen mampu membentuk sesuatu objek itu secara global. Takrifan momen tertib-0 (m_{00}) memberikan jumlah keseluruhan kecerahan imej. Bagi imej bebayang, ianya memberikan keluasan geometri bagi kawasan imej.

Fungsi tertib pertama m_{10}, m_{01} menggambarkan kepadatan momen terhadap paksi-x dan paksi-y dengan kecerahan pusatan (x_0,y_0) diberikan sebagai,

$$x_0 = m_{10} / m_{00}; \qquad y_0 = m_{01} / m_{00} \ .$$

Bagi imej bebayang, titik (x_0,y_0) adalah pusat geometri imej. Sistem rujukan asalan diubah kepada pusatan kecerahan imej bagi memudahkan proses penghitungan. Penjelmaan ini menjadikan penghitungan bersandar kepada kedudukan sistem rujukan imej. Penghitungan momen dengan menggunakan ketumpatan pusatan dikenali sebagai pusatan momen dan ditakrifkan sebagai:

$$\mu_{pq} = \iint_{\delta} (x-x_0)^p (y-y_0)^q f(x,y)\, dx\, dy \ ; p,q = 0,1,2,\ldots \qquad (2)$$

Daripada takrifan pusatan momen, kita akan mendapat :

$$\mu_{00} = m_{00}; \qquad \mu_{10} = \mu_{01} = 0 \ .$$

1.3 Momen Geometri Takubah

Fungsi momen takubah pada satah imej penjelmaan banyak digunakan dalam pengecaman objek dan bentuk. Umpamanya bagi pengecaman corak optik, set bagi sifat bentuk yang dikira untuk sesuatu corak mesti mampu mengenalpasti corak yang sama dengan kemungkinan saiz dan orientasi berbeza. Pertimbangkan penjelmaan linear bagi koordinat imej dari (x,y) ke (x',y') :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad (3)$$

dengan a_{ij} adalah tetap dan penentu $|a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}| \neq 0$. Momen geometri, $m_{pq}{}'$ adalah imej penjelmaan $f'(x', y')$ dan diberikan sebagai ,

$$m_{pq}{}' = \iint_{\delta} (x')^p (y')^q f'(x', y') dx' dy'; \quad p,q = 0,1,2,\ldots \qquad (4)$$

Dengan menyelesaikan persamaan (3), kita akan perolehi,

$$x' = a_{11}x + a_{12}y \_\_\_\_\_\_ (4a)$$

$$y' = a_{21}x + a_{22}y \_\_\_\_\_\_ (4b).$$

Dengan menggantikan persamaan (4a) dan (4b) ke dalam persamaan (3), kita akan mendapat rumus berikut,

$$m_{pq}{}' = \iint_{\delta} (a_{11}x + a_{12}y)^p (a_{21}x + a_{22}y)^q f(x, y) \Delta dx dy, \qquad (5)$$

dengan $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ adalah penentu bagi matriks penjelmaan. Diandaikan bahawa nilai kecerahan imej adalah tetap sepanjang penjelmaan iaitu $f(x,y) = f'(x', y')$. Kamiran di dalam persamaan (5) boleh juga diperkembangkan ke dalam siri momen m_{pq} bagi imej awal untuk mendapatkan perkaitan momen awalan dan imej penjelmaan. Begitu juga dengan persamaan momen yang diperolehi untuk tertib yang berbeza, boleh dimanipulasi secara aljabar untuk menghapuskan parameter imej penjelmaan a_{ij}, bagi menghasilkan ungkapan takubah dalam fungsi momen.

2.0 Anjakan dan Penskalaan Takubah

Pusatan momen yang diberikan dalam persamaan (2) adalah anjakan takubah secara takrifan. Ia menyatakan bahawa imej pusatan (x_0, y_0) melakukan proses anjakan dengan pusatan momen tertakrif terhadap titik ini sebagai kordinat asalan. Ungkapan analisis bagi penghitungan pusatan momen dalam tertib kedua dan ketiga dapat dinyatakan daripada momen geometri biasa, dan diberikan seperti berikut:

$$\begin{aligned} \mu_{02} &= \iint_{\delta} (y - y_0)^2 f(x, y) dx dy, \\ &= \iint_{\delta} (y^2 - 2yy_0 + y_0{}^2) f(x, y) dx dy, \\ &= m_{02} - 2y_0 m_{01} + y_0{}^2 m_{00}, \end{aligned}$$

diketahui $y_0 = \dfrac{m_{01}}{m_{00}}$ maka,

$$= m_{02} - 2y_0 m_{01} + y_0\left(\frac{m_{01}}{m_{00}}\right)m_{00},$$
$$= m_{02} - 2y_0 m_{01} + y_0 m_{01},$$
$$= m_{02} - y_0 m_{01}.$$

Dengan cara yang sama seperti di atas, kita akan memperolehi ungkapan berikut,

$$\mu_{20} = m_{20} - x_0 m_{01},$$

dan

$$\mu_{11} = m_{11} - y_0 m_{10}.$$

Jalan penghitungan bagi rumus di atas ditunjukkan di bawah:

$$\mu_{11} = \iint_{\delta}(x - x_0)(y - y_0)f(x,y)dxdy,$$
$$= \iint_{\delta} xy - xy_0 - x_0 y + x_0 y_0 f(x,y)dxdy,$$
$$= m_{11} - y_0 m_{10} - x_0 m_{01} + x_0 y_0 m_{00},$$
$$= m_{11} - y_0 m_{10} - x_0 m_{01} + x_0\left(\frac{m_{01}}{m_{00}}\right)m_{00},$$
$$= m_{11} - y_0 m_{10} - x_0 m_{01} + x_0 m_{01},$$
$$= m_{11} - y_0 m_{10}.$$

Seterusnya bagi

$$\mu_{30} = \iint_{\delta}(x - x_0)^3 f(x,y)dxdy,$$
$$= \iint_{\delta} x^3 - 3x_0 x^2 + 3xx_0^{\,2} - x_0^{\,3} f(x,y)dxdy,$$
$$= m_{30} - 3x_0 m_{20} + 3x_0^{\,2} m_{10} - x_0^{\,3} m_{00},$$
$$= m_{30} - 3x_0 m_{20} + 3x_0^{\,2} m_{10} - x_0^{\,2}\left(\frac{m_{10}}{m_{00}}\right)m_{00},$$
$$= m_{30} - 3x_0 m_{20} + 3x_0^{\,2} m_{10} - x_0^{\,2} m_{10},$$
$$= m_{30} - 3x_0 m_{20} + 2x_0^{\,2} m_{10}.$$

Dengan menggunakan cara di atas, maka kita akan perolehi momen berikut,

$$\mu_{03} = m_{03} - 3y_0 m_{02} + 2{y_0}^2 m_{01}, \text{ dan}$$

$$\begin{aligned} \mu_{21} &= m_{21} - 2x_0 m_{11} - y_0 m_{20} + 2{x_0}^2 m_{01}, \\ \mu_{12} &= m_{12} - 2y_0 m_{11} - x_0 m_{02} + 2{y_0}^2 m_{10}. \end{aligned} \qquad (6)$$

Penjelmaan bagi koordinat imej piksel bagi faktor skala seragam k diberikan oleh:

$$x' = kx\,; \qquad y' = ky\,. \qquad (7)$$

Penjelmaan di atas menghasilkan ungkapan bagi elemen skala keluasan sesuatu unsur.

$$dx'dy' = k^2 dxdy\,. \qquad (8)$$

Momen bagi imej yang telah diskala boleh dinyatakan dalam sebutan momen bagi imej asal seperti berikut:

$$m_{pq}{}' = k^{p+q+2} m_{pq}\,.$$

Diketahui bahawa persamaan geometri momen $m_{pq}{}'$ bagi penjelmaan imej $f'(x', y')$ adalah

$$m_{pq}{}' = \iint_{\delta} (x')^p (y')^q f'(x', y') dx'dy'\,.$$

Gantikan setiap nilai di atas dengan persamaan (7) dan persamaan (8), maka kita akan mendapat,

$$m_{pq}{}' = \iint_{\delta} (kx)^p (ky)^q f'(x', y') k^2 dxdy\,.$$

Nilai fungsi kecerahan imej adalah tetap di sepanjang penjelmaan iaitu $f(x, y) = f'(x', y')$. Maka diperoleh,

$$m_{pq}{}' = \iint_{\delta} (kx)^p (ky)^q f'(x', y') k^2 dxdy$$

$$
\begin{aligned}
&= \iint_{\delta} k^p x^p k^q y^q k^2 f(x,y)dxdy, \\
&= k^p k^q k^2 \iint_{\delta} x^p y^q \; f(x,y)dxdy, \qquad (9) \\
&= k^{p+q+2} \; m_{pq}.
\end{aligned}
$$

Daripada persamaan (9), kita akan memperolehi ungkapan berikut dengan k adalah *penskalaan seragam* :

$$
\begin{aligned}
m_{00}' &= k^{0+0+2} m_{00}, \\
&= k^2 m_{00}. \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Hapuskan faktor skala k yang tidak diketahui daripada dua persamaan di atas iaitu persamaan (8) dan persamaan (9), maka akan terhasil ungkapan,

$$m_{pq}' = k^{p+q+2} m_{pq} \qquad (11a)$$

$$m_{00}' = k^2 m_{00}. \qquad (11b)$$

Daripada persamaan (11b), kita akan mendapat ungkapan,

$$k^2 = \frac{m_{00}'}{m_{00}}, \qquad dan$$

$$k = \left(\frac{m_{00}'}{m_{00}}\right)^{1/2}. \qquad (11c)$$

Gantikan persamaan (11c) ke dalam (11a) maka ungkapan berikut diperolehi,

$$\left(\frac{m_{00}'}{m_{00}}\right)^{\frac{p+q+2}{2}} = \frac{m_{pq}'}{m_{pq}}, \qquad iaitu$$

$$m_{pq} m_{00}'^{\frac{p+q+2}{2}} = m_{pq}' m_{00}^{\frac{p+q+2}{2}}.$$

Seterusnya rumus di atas dapat dinyatakan sebagai,

$$\frac{m_{pq}'}{(m_{00}')^{\frac{(p+q+2)}{2}}} = \frac{m_{pq}}{(m_{00})^{\frac{(p+q+2)}{2}}} \quad (12)$$

Ungkapan di atas merupakan pembuktian secara matematik bahawa bentuk imej asal tidak berubah apabila operasi asas penjelmaan seperti putaran, penskalaan dan anjakan dilakukan terhadapnya. Bagi mempermudahkan ungkapan, andaikan $\eta_{pq} = \dfrac{m'_{pq}}{(m'_{00})^{(p+q+2)/2}}$ dan $\mu_{pq} = \dfrac{m_{pq}}{(m_{00})^{(p+q+2)/2}}$ maka,

$$\eta_{pq} = \mu_{pq} / (\mu_{00})^{\frac{(p+q+2)}{2}} . \quad (13)$$

Rumus (12) adalah takubah terhadap proses anjakan dan kepelbagaian penskalaan. Rumusan skala takubah boleh dijana sebagai alternatif perhitungan bagi mencapai sebarang skala penormalan. Contoh di bawah menggunakan penormalan takubah dengan μ_{20} dan μ_{02} adalah pusatan momen sebagaimana yang tertakrif oleh rumus (2) :

$$\eta_{pq} = \mu_{pq} / (\mu_{20} + \mu_{02})^{(p+q+2)/4} , \qquad dan$$
$$\eta_{pq} = \frac{\mu_{pq}}{\mu_{00}} \left(\frac{\mu_{00}}{\mu_{20} + \mu_{02}} \right)^{(p+q)/2} \quad (14)$$

Jika imej dijelmakan dengan faktor skala yang tak seragam, k_1, k_2 di sepanjang paksi-x dan paksi-y, maka akan diperolehi momen penjelmaan seperti di bawah. Daripada (4), diketahui bahawa,

$$m_{pq}' = \iint_{\delta} (x')^p (y')^q f'(x', y') dx' dy' \ ,$$

dan persamaan (7) boleh diungkap dengan menggantikan k kepada k_1, k_2, maka kita akan mendapat :

$$x' = k_1 x , \qquad y' = k_2 y ,$$

$$dx' dy' = k_1 k_2 dx dy \ \text{ dan } \ f(x, y) = f'(x', y') ,$$

dengan

$$m_{pq} = \iint_{\delta} (k_1 x)^p (k_2 y)^q f(x,y) k_1 k_2 dxdy,$$
$$= \iint_{\delta} k_1{}^p x^p k_2{}^q y^q k_1 k_2 f(x,y) dxdy,$$
$$= k_1{}^{(p+1)} k_2^{(q+1)} \iint_{\delta} x^p y^q f(x,y) dxdy, \quad (15)$$
$$= k_1^{(p+1)} k_2^{(q+1)} m_{pq}.$$

Dengan mengungkap persamaan di atas bagi beberapa tertib momen, dan menghapuskan k_1, k_2, maka kita akan mendapat sebutan berikut,

$$\eta_{pq} = \frac{(\mu_{00})}{(\mu_{20})^{(p+1)/2} (\mu_{02})^{(q+1)/2}} \mu_{pq}, \quad (16)$$

yang takubah terhadap imej bagi *penskalaan tak seragam*. Ianya dikenali juga sebagai nisbah aspek takubah (Feng *et. al*, 1994).

3.0 Putaran Takubah

Putaran bersudut, θ bagi imej mempunyai piksel yang bersekutu dengan koordinat penjelmaan dan diberikan seperti berikut:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & kos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Penjelmaan bagi sebutan momen m_{pq} boleh dianalisa untuk mendapatkan fungsi m_{pq} yang tak bersandar kepada sudut putaran . Sebagai contoh, jumlah kecerahan momen m_{00} bagi imej adalah takubah kepada imej proses putaran. Bagi mendapatkan persamaan momen m_{20}', pertimbangkan persamaan (17) yang boleh diolah seperti berikut,

$$x' = x\,kos\theta - y\sin\theta,$$
$$y' = x\sin\theta + y\,kos\theta.$$

Diketahui bahawa persamaan di bawah adalah,

$$m_{pq} = \iint_{\delta} (x')^p (y')^q f'(x',y')dx'dy'; \quad p,q=0,1,2,\ldots \qquad (18)$$

dan juga persamaan (5) bagi penjelmaan imej $f'(x',y')$, maka

$$m_{20}' = \iint_{\delta} (kos\,\theta x - \sin\theta y)^2 (\sin\theta x + kos\,\theta y)^0 f(x,y) \left| kos\,\theta (kos\,\theta) + (\sin\theta)(-\sin\theta) \right| dxdy,$$

$$= \iint_{\delta} kos^2\theta x^2 - 2kos\,\theta x \sin\theta y + \sin^2\theta y^2 f(x,y) \left| kos^2\theta + \sin^2\theta \right| dxdy,$$

$$= \iint_{\delta} kos^2\theta x^2 - 2kos\,\theta x \sin\theta y + \sin^2\theta y^2 f(x,y)dxdy,$$

$$= \iint_{\delta} kos^2\theta x^2 f(x,y)dxdy - \iint_{\delta} 2kos\,\theta x \sin\theta y f(x,y)dxdy + \iint_{\delta} \sin^2\theta y^2 f(x,y)dxdy,$$

dengan menggunakan identiti geometri dan persamaan (18) , maka kita akan menperolehi,

$$m_{20}' = \left(\frac{1 + kos\,\theta}{2} \right) m_{20} - (\sin 2\theta) m_{11} + \left(\frac{1 - kos\,\theta}{2} \right) m_{02}.$$

Begitu juga bagi mendapatkan m_{11}', iaitu,

$$m_{11}' = \iint_{\delta} (kos\,\theta x - \sin\theta y)(\sin\theta x + kos\,\theta y) f(x,y)dxdy,$$

$$= \iint_{\theta} kos\,\theta x \sin\theta x - \sin\theta y \sin\theta x + kos\,\theta x kos\,\theta y - \sin\theta y kos\,\theta y f(x,y)dxdy,$$

$$= \iint_{\theta} (kos\,\theta \sin\theta)x^2 + (-\sin^2\theta)xy + (kos^2\theta)xy - (\sin\theta kos\,\theta)y^2 f(x,y)dxdy,$$

$$= kos\,\theta \sin\theta \iint_{\delta} x^2 f(x,y)dxdy + (kos^2\theta - \sin^2\theta) \iint_{\delta} xy f(x,y)dxdy - \sin\theta kos\,\theta \iint_{\delta} y^2 f(x,y)dxdy.$$

Dengan menggunakan identiti geometri dan persamaan (18), maka kita diperolehi ungkapan,

$$m_{11}' = \left(\frac{\sin 2\theta}{2} \right) m_{20} + (kos 2\theta) m_{11} - \left(\frac{\sin 2\theta}{2} \right) m_{02}.$$

Dan m_{02}' boleh dijana seperti di bawah,

$$m_{02}' = \left(\frac{1-kos\theta}{2}\right)m_{20} + (\sin 2\theta)m_{11} + \left(\frac{1+kos\theta}{2}\right)m_{02}\ . \qquad (19)$$

Daripada persamaan di atas, dapat dilihat bahawa sebutan $(m_{20} + m_{02})$ adalah putaran takubah. Jika sebutan η_{pq} yang diberikan dalam persamaan (13) digunakan bagi menggantikan m_{pq} dalam ungkapan putaran takubah, maka diperolehi fungsi takubah yang mempertimbangkan proses anjakan, penskalaan dan putaran. Fungsi takubah ini dikenali sebagai momen geometri takubah.

Set bagi momen geometri takubah bagi tertib ke-2 dan ke-3 yang banyak digunakan di dalam pengekstrakan fitur adalah seperti di bawah:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \eta_{20} + \eta_{02}, \\
\varphi_2 &= (\eta_{20} - \eta_{02})^2 + 4\eta_{11}^{\ 2}, \\
\varphi_3 &= \eta_{20}\eta_{02} - \eta_{11}^2, \\
\varphi_4 &= (\eta_{30} - 3\eta_{12})^2 + (3\eta_{21} - \eta_{03})^2 \\
\varphi_5 &= (\eta_{30} + \eta_{12})^2 + (\eta_{21} + \eta_{03})^2.
\end{aligned} \qquad (20)$$

4.0 Penghitungan Momen Geometri

Ungkapan bagi fungsi momen dalam persamaan (18) melibatkan kamiran selanjar bagi nilai kepadatan kawasan imej. Imej ini berada dalam rantau keadaan tetap pada kedudukan piksel mengikut tatasusunan diskret. Setiap kedudukan piksel mempunyai nilai aras kelabu. Pembuktian penghitungan momen bagi imej N x N secara digital bagi persamaan (18) ditulis sebagai ,

$$m_{pq} = \sum_{x=1}^{N}\sum_{y=1}^{N} x^p y^q f(x,y)\,. \qquad (21)$$

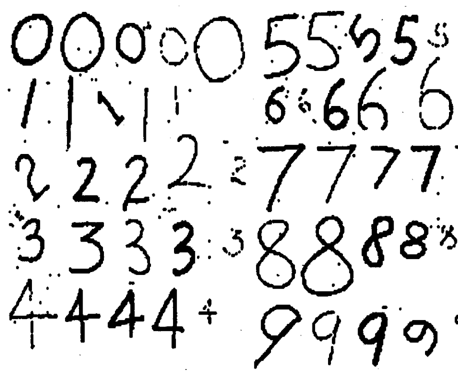
Ungkapan penghitungan momen bagi imej di atas dikenali sebagai kaedah penambahan terus. Bagi imej binari, kepadatan fungsi f mengambil nilai 1 untuk kawasan imej, manakala nilai 0 mewakili latar belakangnya. Dalam beberapa kes, persamaan (20) boleh dipermudahkan ke dalam bentuk berikut,

$$m_{pq} = \sum\sum x^p y^q\,, \qquad (22)$$

iaitu x,y adalah koordinat piksel dengan $f(x,y) = 1$.

5.0 Aplikasi Perhitungan Momen Geometri Takubah Terhadap Digit Tulisan Tangan

Di sini dilampirkan sampel digit tulisan tangan (**Rajah 1**) bagi tujuan ilustrasi penggunaan momen geometri takubah terhadapnya (Md. Nasir Sulaiman *et. al*, 2001), dan **Rajah 2** mewakili sebahagian daripada sampel digit tulisan tangan dalam bentuk binari.



Rajah 1 : Sampel Digit Tulisan Tangan

00000000000000000000
00000000111110000000
00000010000001000000
00000100000000100000
00001000000000010000
00010000000000001000
00010000000000001000
00010000000000001000
00010000000000001000
00010000000000001000
00011000000000001000
00001000000000010000
00001000000000100000
00000100000001000000
00000011111110000000
00000000000000000000

00000000000000000000
00000000001000000000
00000000001000000000
00000000010000000000
00000000010000000000
00000000010000000000
00000000010000000000
00000000010000000000
00000000010000000000
00000000010000000000
00000000010000000000
00000000010000000000
00000000010000000000
00000000010000000000
00000000010000000000
00000000000000000000

```
00000000000000000000
00000000000000000000
00000000011111100000
00000000010000100000
00000000010000100000
00000000000000100000
00000000000001000000
00000000000001000000
00000000000010000000
00000000000100000000
00000000001100000000
00000000011000000000
00000000010000000000
00000000100000000000
00000001000000000000
00000000111111000000
00000000000000000000
00000000000000000000
```

```
00000000000000000000
00000000011110000000
00000001000011000000
00000010000001100000
00000010000000100000
00000010000000100000
00000000000000100000
00000000000001000000
00000000000111100000
00000000000000110000
00000000000000010000
00000000000000010000
00000000000000010000
00000000000000010000
00000000000000010000
00000001000000100000
00000000111110000000
00000000000000000000
```

Rajah 2 : Sampel Digit Tulisan Tangan Dalam Bentuk Binari

Imej digit di atas merupakan sampel imej yang sudah melalui fasa pra-pemprosesan seperti segmentasi dan penipisan. Peranan perhitungan momen geometri takubah adalah untuk menjana nilai numerik bagi setiap digit tulisan tangan untuk tujuan pengekstrakan fitur. **Jadual I** merupakan nilai numerik bagi setiap digit dengan pelbagai orientasi selepas pengekstrakan fitur menggunakan rumus (13) iaitu momen geometri takubah terhadap penskalaan dan anjakan.

Jadual 1 : Momen Geometri Takubah bagi Digit Tulisan Tangan

Digit	η_{02}	η_{03}	η_{11}	η_{12}	η_{13}	η_{21}	η_{22}	η_{30}	η_{31}
0	0.97156	0.48760	0.13026	0.10975	0.33791	0.14417	0.44815	0.00438	0.12167
	0.70369	0.40026	0.03384	0.00383	0.05080	0.11930	0.26299	0.00840	0.04835
1	1.03344	0.02483	0.00315	0.19576	0.03089	0.03719	0.68558	0.23649	0.06805
	2.17242	0.01519	0.17005	0.14861	0.07821	0.00893	1.12459	0.03798	0.25220
2	0.84486	0.18732	0.40302	0.19718	0.52081	0.23794	0.40463	0.19999	0.35169
	1.03422	0.11301	0.48774	0.13802	0.60119	0.13872	0.38235	0.12162	0.31741
3	0.73786	0.16111	0.11798	0.12516	0.11930	0.00936	0.08405	0.02933	0.03889
	1.56888	0.26855	0.01649	0.21398	0.12318	0.00443	0.73094	0.00324	0.03234
4	1.21142	0.33256	0.16491	0.13211	0.41813	0.05812	0.54560	0.10061	0.02001
	1.35423	0.04051	0.12452	0.02301	0.26707	0.07308	0.39115	0.06189	0.14053
5	0.75221	0.10539	0.39139	0.02671	0.33723	0.01089	0.37266	0.0163	0.39383
	0.94432	0.03042	0.25469	0.00045	0.25602	0.01189	0.70984	0.11129	0.22281
6	1.159	0.13424	0.01151	0.04742	0.08265	0.07593	0.52557	0.17105	0.08605
	1.46871	0.10857	0.04225	0.13620	0.19085	0.01047	0.29341	0.03787	0.03130
7	0.50196	0.10606	0.08389	0.04004	0.11848	0.06108	0.3059	0.38133	0.19369
	1.13534	0.19686	0.27322	0.18290	0.51196	0.18987	0.65196	0.08409	0.12108
8	0.72551	0.0553	0.1246	0.07991	0.11189	0.01663	0.28505	0.02446	0.10681
	1.12731	0.05422	0.08744	0.04339	0.20886	0.03974	0.27336	0.01798	0.05335
9	0.80942	0.10205	0.0025	0.03932	0.04384	0.01738	0.24069	0.03005	0.00679
	1.09414	0.03010	0.03566	0.00497	0.06643	0.03422	0.43626	0.04318	0.07006

Momen geometri takubah yang dijana di atas bagi sampel tulisan tangan untuk setiap digit memberikan nilai numerik yang unik bagi setiap imej dengan pelbagai orientasi. Dalam konteks ini, tiada satu piawaian pengukuran yang boleh diterimapakai bagi mewakili perwakilan setiap digit yang berkaitan. Oleh yang sedemikian, pendekatan yang diambil oleh kebanyakkan penyelidik adalah dengan memastikan bahawa nilai momen takubah berikut adalah berbeza bagi setiap imej yang berlainan dan mempunyai sisihan yang kecil bagi imej yang sama dengan orientasi yang berbeza. Namun begitu bidang tujahan bagi mengkaji kesauran penjanaan piawaian pengukuran bagi imej digit tulisan tangan adalah di dalam fasa kajian dan pelaksanaan oleh penulis.

6.0 Kesimpulan

Penghitungan momen imej perlu kepada ketepatan yang tinggi yang bertujuan untuk menampung kesesuaian penjelmaan momen dan bagi mendapatkan cirian bagi momen takubah. Dalam aplikasi pengecaman pola, kepantasan penghitungan merupakan salah satu faktor utama yang dititikberatkan. Masa sebenar pemprosesan penghitungan memerlukan kepada perlaksanaan yang berasaskan kepada prosedur asas momen. Oleh yang sedemikian,kefahaman yang jelas dan sistematik tentang teori konsep momen geometri takubah perlu diambilkira sekiranya kita hendak menggunakannya terhadap pengekstrakan fitur. Justru itu, kertas kerja ini bertujuan mencungkil kesiratan teknik momen geometri takubah terhadap pengekstrakan fitur ke dalam ungkapan yang mudah untuk difahami.

Rujukan

[1]. Feng Pang and Mike Keane. 1994. A New set of moment invariant for Handwritten Numeral Recognition. *IEEE Intern. Conf. On Image Processing*, pp 154-158.

[2]. Md. Nasir Sulaiman & Siti Mariyam Shamsuddin. 2001. Unconstrained Handwritten Digit Recognition Using Improved Moment Invariant. *ELEKTRIKA, Journal of Electrical Engineering*, Universiti Teknologi Malaysia, 4(1) : 63-74.

[3]. M.K. Hu. 1962. Visual Pattern Recognition by Moment Invariant. *IRE Trans. Inform. Theory*, Vol. IT-8,pp 179-187.

[4]. R. Mukundan and K.R. Ramakrishnan. 1998. *Moment Functions in Image Analysis : Theory and Applications*. World Scientific Pub.