MATEMATIKA, 2008, Volume 24, Number 1, 85–97
©Department of Mathematics, UTM.

Pengujian Statistik Anderson Darling bagi Taburan Nilai Ekstrim Teritlak

(The Anderson-Darling Test Statistic of the Generalized Extreme Value)

[1]**Ani Shabri** & [2]**Abdul Aziz Jemain**
[1]Jabatan Matematik, Fakulti Sains, Universiti Teknologi Malaysia
81310 UTM Skudai, Johor, Malaysia
[2]Pusat Pengajian Sains Matematik, Fakulti Sains & Teknologi
Universiti Kebangsaan Malaysia, 43600 Bangi, Selangor Malaysia
e-mail: [1]ani@utm.my, [2]azizj@pkrisc.cc.ukm.my

Abstrak Makalah ini mempersembahkan kajian untuk membangun dan menilai pengujian statistik Anderson-Darling (AD) dalam menguji kesesuaian taburan nilai ekstrim teritlak (GEV). Jadual nilai kritikal statistik AD dibangunkan berdasarkan khi-kuasa dua Pearson dan kebolehjadian statistik bagi taburan GEV menggunakan simulasi Monte Carlo. Nilai kritikal statistik ini dimodelkan menggunakan persamaan regresi untuk menyediakan persamaan bagi menganggar nilai kritikal untuk sebarang parameter bentuk taburan. Kajian simulasi berdasarkan beberapa bentuk taburan menunjukkan bahawa statistik AD berdasarkan pengujian statistik kebolehjadian nisbah mempunyai kekuatan yang lebih baik berbanding statistik AD berdasarkan khi-kuasa dua Pearson dalam menguji kesesuaian taburan GEV.

Katakunci Statistik Anderson Darling; Kebolehjadian-nisbah; khi-kuasa dua Pearson; L-momen.

Abstract *This paper presents the results of developing and evaluating goodness-of-fit tests for the generalized extreme value (GEV). The critical values tables AD test are developed based on the Pearsons chi-squared and the likelihood ratio statistic for GEV distribution is developed through Monte-Carlo simulation. The critical values for the statistics are modeled through regression to provide equations to estimate the critical values for any shape parameters distribution. Simulation studies using several different distributional forms show that the critical values tables AD test based on the likelihood ratio statistic has a larger power than the AD test based on the Pearson chi-squared for testing the GEV distribution.*

Keywords *Anderson-Darling statistic, Pearsons chi-squared, likelihood-ratio, L-moment.*

1 Pengenalan

Sebelum sesuatu model taburan ditentukan untuk mengambarkan populasi satu set data tertentu, adalah penting data tersebut diuji kesesuaiannya dengan model yang diandaikan.

Pengujian kesesuaian statistik biasanya digunakan untuk mengukur darjah kesesuaian antara taburan cerapan data sampel dengan teori taburan statistik. Penggunaan ujian statistik yang betul dan mempunyai kekuatan yang tinggi adalah begitu penting. Ini kerana jika ujian statistik yang digunakan tidak tepat dan mempunyai kekuatan yang rendah ia boleh menyebabkan kebarangkalian penerimaan taburan yang palsu meningkat.

Pemasalahan utama yang dihadapi oleh para penyelidik dalam menguji kesesuaian sesuatu taburan adalah untuk mendapatkan jadual nilai kritikal bagi taburan dengan parameter yang tak diketahaui. Bila menggunakan jadual bagi kes nilai parameter diketahui untuk menilai kesesuaian taburan yang diuji, biasanya penerimaan hipotesis nol bagi taburan yang diuji lebih tinggi berbanding penolakkan [1]. Secara umumnya, bila parameter tak diketahui untuk sampel yang terhad, nilai kritikal pengujian statistik boleh diperolehi melalui simulasi.

Kebanyakan kajian lepas membincangkan pengujian statistik berdasarkan taburan dengan dua parameter yang dianggarkan dengan menggunakan kaedah kebolehjadian maksimum (lihat Zhang & Wu [15], DAgostino & Stephens [3], Evans et al [4]). Walau bagaimanapun dalam keadaan sebenar seperti dalam analisis frekuensi banjir, taburan dengan tiga parameter adalah lebih diminati [5]. Evans et al [4] dapati untuk membangunkan taburan dengan tiga parameter adalah begitu sukar kerana ianya didapati bergantung kepada parameter bentuk yang tak diketahui. Ketidakdapatan nilai kritikal bagi pengujian pemadanan statstik bagi taburan dengan tiga parameter menyebabkan ramai penyelidik hanya menggunakan jadual nilai kritikal pengujian statstistik berdasarkan taburan Normal ataupun taburan lain yang sepadan (lihat Wang [14], Sulaiman et al [13], Pokhrel [8]). Ketepatan samada untuk menerima atau menolak sesuatu taburan yang diuji berdasarkan nilai kritikal taburan yang lain masih boleh dipersoalkan.

Pengujian kesesuaian statistik traditional berdasarkan fungsi taburan empirik seperti statistik KS (Kolmogorv-Smirnov), AD, CR (Cramer von-Mises) dan W (Watson) telah meluas digunakan dan dibincangkan untuk menguji kesesuaian sesuatu taburan. DAgostino & Stephens [3] dapati statistik AD mempunyai kekuatan pengujian yang statistik yang tinggi. Evans et al [4] telah membandingkan kekuatan statistik AD, KS dan korelasi Shipro-Wilk dalam menguji kesesuaian taburan Weibull. Didapati statistik AD adalah yang terbaik berbanding statistik yang lain. Gunes et al [6] dapati statistik AD adalah yang terbaik berbanding statistik KS, CR dan W dalam menguji kesesuaian taburan Gauss songsang.

Ahmad et al [1] telah membangunkan jadual nilai kritkal statistik AD bagi taburan GEV dan GL berdasarkan penganggar bias L-momen. Nilai kritikal statistik AD untuk setiap parameter yang berbeza diringkaskan dengan mempuratakan nilai kritikal statistik AD untuk setiap parameter. Beliau dapati statistik AD adalah statistik yang menarik dan berupaya untuk menguji kesesuaian taburan frekuensi banjir.

Zhang [15] telah membangunkan statistik AD berdasarkan statistik kebolehjadian nisbah dalam menguji kenormalan data. Kekuatan statistik ini didapati lebih baik berbanding statistik traditional AD dalam menguji kenormalan data berdasarkan ujikaji data simulasi Monte Carlo.

Dalam kajian ini, penganggar tanpa bias L-momen digunakan untuk membangunkan jadual nilai kritikal statistik AD bagi taburan GEV dengan parameter tak diketahui. Statistik khi-kuasa dua Pearson dan kebolehjadaian nisbah digunakan untuk membina statistik AD. Kesesuaian jadual nilai kritikal bagi pengujian statistik AD ini diuji dan dibandingakan dengan kesesuaian nilai kritikal statistik yang dibangunkan oleh Ahmad et al [1]. Kekuatan statistik AD yang dibangunkan berdasarkan statistik khi-kuasa dua Pearson dan kebolehjadian nisbah dibandingkan kekuatannya dalam memodelkan taburan GEV berdasarkan data simulasi dari 7 taburan alternatif dengan parameter dan saiz sampel yang berlainan.

2 Taburan Nilai Ekstrim Teritlak

Taburan Nilai Ekstim Teritlak "General Extreme Value (GEV) telah diperkenalkan oleh Jenkinson dalam tahun 1955. Taburan ini begitu meluas digunakan dalam kejadian ekstim seperti banjir, kemarau, paras air laut ekstrim dan rebut dan telah dijadikan taburan piawai di United Kingdom dalam analisis banjir [2]. Fungsi ketumpatan kebarangkalian (fkk) bagi taburan GEV diberikan oleh

$$f(x) = \frac{1}{\alpha}\left[1 - k\left(\frac{x-\xi}{\alpha}\right)\right]^{1/k-1} \exp\left\{-\left[1 - k\left(\frac{x-\xi}{\alpha}\right)\right]^{1/k}\right\} \tag{1}$$

dengan ξ, α dan k adalah parameter lokasi, skala dan bentuk masing-masing. Fungsi taburan kumulatif bagi taburan GEV boleh ditulis sebagai

$$F(x) = \begin{cases} \exp\left[-\left\{1 - \frac{k}{\alpha}(x-\xi)^{1/k}\right\}\right] & k \neq 0 \\ \exp\left[-\exp\left\{-\left(\frac{x-\xi}{\alpha}\right)\right\}\right] & k = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Kuantil bagi taburan GEV diberikan oleh

$$x(F) = \xi + \frac{\alpha}{k}\left[1 - \left[-\ln\left\{F(x)\right\}\right]^k\right]. \tag{3}$$

Julat bagi pembolehubah rawak x bergantung kepada tanda bagi parameter k. Bila k negatif ($\gamma > 1.1396$) pembolehubah x berada dalam julat $\xi + \alpha/k < x < \infty$ yang mana ia sesuai untuk analisis frekuensi banjir. Bagaimanapun, bila k positif ($\gamma < 1.1396$) pembolehubah x akan mempunyai had atas dan ia akan berada dalam julat $-\infty < x < \xi + \alpha/k$ yang mana tidak sesuai untuk analisis frekuensi banjir kecuali terdapat bukti yang cukup supaya had atas wujud. Bila $k = 0 (\gamma = 1.1396)$, taburan GEV merupakan taburan EV1.

2.1 Kaedah L-Momen

Pelbagai kaedah didapati berupaya untuk menganggar parameter fungsi taburan GEV seperti kaedah momen (MOM), kebolehjadian maksimum (KM), dan L-momen (L-MOM). Kaedah L-momen merupakan kaedah yang terkini yang begitu meluas digunakan dalam analisis frekuensi banjir kerana pengiraannya ringkas, teguh dan menghasilkan anggaran yang lebih tepat berbanding kaedah MOM [11].

Kebarangkalian pemberat momen "probability weighted moment (PWM) ditakrifkan oleh Greeenwood et al [5] sebagai

$$\beta_r = E[X\left\{F(x)\right\}^r] = \int_0^1 x(F)\ \left\{F(x)\right\}^r dF(x) \tag{4}$$

dengan $x(F)$ adalah kuantil bagi taburan dan $F(x)$ adalah fungsi taburan kumulatif. Bagi sampel tertib $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq ... \leq x_{(n)}$, penganggar tanpa bias bagi PWM ditakrifkan sebagai

$$b_r = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)(i-2)...(i-r)}{(n-1)(n-2)...(n-r)} x_{(i)} = \hat{\beta}_r \tag{5}$$

dan penganggar bias bagi PWM ditakrifkan sebagai

$$b_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} p_i^r x_{(i)} \quad \text{dan} \quad p_i = (i - 0.35)/n. \tag{6}$$

L-momen populasi ke-empat yang pertama dalam sebutan PWM dapat ditakrifkan oleh Hosking [7] sebagai

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \beta_0 \\ \lambda_2 &= 2\beta_1 - \beta_0 \\ \lambda_3 &= 6\beta_2 - 6\beta_1 + \beta_0 \\ \lambda_4 &= 20\beta_3 - 30\beta_2 + 12\beta_1 - \beta_0 \end{aligned} \tag{7}$$

Nisbah L-momen ditakrifkan sebagai

$$\tau = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \tag{8}$$

dan

$$\tau_r = \frac{\lambda_r}{\lambda_2}, \quad r \geq 3 \tag{9}$$

dengan τ adalah ukuran bagi variasi (LCv), τ_3 adalah ukuran bagi L-kepencongan (LCs) dan τ_4 adalah ukuran bagi L-kurtosis (LCk).

2.2 Anggaran Parameter GEV

Hosking [7] mendapati anggaran parameter bagi taburan GEV menggunakan kaedah L-momen adalah

$$\begin{aligned} k &= 7.8590c + 2.9554c^2 \\ c &= \frac{2b_1 - b_0}{3b_2 - b_0} - \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \\ \alpha &= \frac{k(b_2 - b_1)}{\Gamma(1+k)(1-2^{-k})} \\ \xi &= b_0 + \frac{\alpha}{k\{\Gamma(1+k) - 1\}}. \end{aligned} \tag{10}$$

3 Pengujian Kesesuaian Taburan

Sebelum sesuatu taburan digunakan untuk mengambarkan populasi satu set data tertentu, data tersebut perlu diuji kesesuaiannya dengan model taburan yang diandaikan. Pengujian kesesuaian statistik digunakan untuk mengukur darjah kesesuaian antara sampel data dengan taburan statistik yang diuji.

Pengujian statistik yang digunakan dalam kajian ini adalah berdasarkan dua jenis statistik iaitu

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} Z_t dw(t) \tag{11}$$

dengan $w(t)$ adalah fungsi berpemberat dan Z_t adalah statistik khi-kuasa dua Pearson dan statistik nisbah kebolehjadian

3.1 Statistik Khi-kuasa Dua Pearson

Statistik khi-kuasa dua Pearson ditakrifkan [3] sebagai

$$\chi_t^2 = \frac{n\left[F_n(t) - F(t)\right]^2}{F(t)\,\left[1 - F(t)\right]} \tag{12}$$

dengan $F_n(x_{(i)}) = i/n$ adalah fungsi taburan empirik bagi statistik tertib $x_{(1)}, x_{(2)}, ..., x_{(n)}$ dan $F(x_{(i)})$ adalah fungsi taburan kumulatif bagi taburan GEV yang sepadan. Dengan memilih $Z_t = \chi_t^2$ dan $w(t) = F(t)$ diperolehi statistik Anderson Darling dan ditakrifkan sebagai

$$\begin{aligned} Z &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n\left[F_n(t) - F(t)\right]^2}{F(t)\,\left[1 - F(t)\right]} dF(t) = A_n^2 \\ A_n^2 &= -\sum_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{n}.\left[\ln(F(x_{(i)}) + \ln(1 - F(x_{(n+1-i)}))\right] - n. \end{aligned} \tag{13}$$

3.2 Statistik Nisbah Kebolehjadian

Statistik nisbah kebolehjadian ditakrifkan oleh Zhang & Wu [15] sebagai

$$G_t^2 = 2n\left\{F_n(t)\ln\frac{F_n(t)}{F(t)} + \left[1 - F_n(t)\right]\ln\frac{1 - F_n(t)}{1 - F(t)}\right\} \tag{14}$$

Dengan memilih $Z_t = G_t^2$ dan $dw(t) = F_n(t)^{-1}\,\left[1 - F_n(t)\right]^{-1}\,dF_n(t)$ diperolehi Z Anderson Darling (ZAD) seperti berikut

$$\begin{aligned} ZAD &= \int_{-\infty}^{\infty} n\left\{F_n(t)\ln\frac{F_n(t)}{F(t)} + \left[1 - F_n(t)\right]\ln\frac{1 - F_n(t)}{1 - F(t)}\right\}\frac{1}{F_n(t)\left[1 - F_n(t)\right]}dF_n(t) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\ln F(x_{(i)})}{(n - i + 0.5)} + \frac{\ln[1 - F(x_{(i)})]}{(i - 0.5)}\right]. \end{aligned} \tag{15}$$

4 Nilai Kritikal

Dalam kajian ini, sampel rawak dari taburan GEV dijana menggunakan simulasi Monte-Carlo untuk mendapatkan nilai kritikal bagi pengujian statistik AD dan ZAD bagi taburan

GEV. Sampel bersaiz $n = 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 50$ dan 100 dijana dari taburan GEV dengan parameter taburan ditetapkan iaitu $\xi = 0, \alpha = 1$ dan $k = -0.5, -0.4, -0.3, 0.2, -0.1, 0,$ $0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ dan 0.5. Nilai setiap pengujian statistik dikira dan proses ini diulangi sehingga 10000 kali. Untuk setiap pengujian statistik yang dijana, nilai 10000 statistik ini disusun. Nilai kritikal pada aras keertian $0.50, 0.25, 0.15, 0.10, 0.05$ dan 0.01 diperolehi berdasarkan nilai statistik tertib ke $50, 75, 85, 90, 95$ dan 99 persentil bagi nilai 10000 statistik yang ditertibkan. Nilai kritikal pengujian statistik untuk nilai k yang dipuratakan dapat ditunjukkan dalam Jadual 1.

Jadual 1: Nilai Kritikal Bagi Taburan GEV Menggunakan Pengujian Statistik Anderson Darling (AD) Dan Z Anderson Darling (ZAD)

	Statistik AD						Statistik ZAD					
n	50%	25%	15%	10%	5%	1%	50%	25%	15%	10%	5%	1%
10	0.296	0.389	0.457	0.511	0.604	0.861	3.306	3.343	3.372	3.400	3.460	3.718
15	0.285	0.379	0.444	0.496	0.594	0.875	3.311	3.341	3.367	3.391	3.441	3.667
20	0.279	0.375	0.442	0.494	0.585	0.864	3.312	3.339	3.361	3.381	3.421	3.581
25	0.278	0.373	0.438	0.487	0.583	0.846	3.313	3.338	3.358	3.374	3.410	3.571
30	0.274	0.367	0.431	0.482	0.576	0.806	3.313	3.336	3.355	3.370	3.402	3.535
35	0.273	0.368	0.431	0.480	0.572	0.805	3.313	3.333	3.350	3.364	3.392	3.491
40	0.272	0.367	0.431	0.484	0.570	0.820	3.312	3.331	3.347	3.360	3.388	3.491
50	0.270	0.363	0.427	0.476	0.563	0.782	3.311	3.328	3.341	3.352	3.372	3.445
100	0.270	0.361	0.422	0.471	0.553	0.741	3.306	3.318	3.326	3.333	3.345	3.383

4.1 Penghampiran Statistik AD

Dalam usaha untuk mendapatkan anggaran statistik AD dalam Jadual 1 yang licin dan mudah digunakan untuk pengiraan, nilai kritikal sebagai fungsi kepada parameter bentuk, k dimodelkan. Hubungan antara nilai kritikal dan parameter bentuk, k dalam kes ini disuaikan dengan persamaan polinomial peringkat ke-5 dan diberikan oleh

$$Y = a_0 + a_1 k + a_2 k^2 + a_3 k^3 + a_4 k^4 + a_5 k^5, \quad -5.0 \leq k \leq 6.0$$

dengan Y adalah nilai kritikal statistik AD dan ZAD, a_0, $a_1, \ldots, a_5$ pekali regresi dan k parameter bentuk. Hubungan antara nilai kritikal dan parameter bentuk taburan GEV dan pekali penentu R^2 untuk statistik AD dan ZAD pada aras keertian 5% dan 10% untuk nilai dan $n = 10, 30, 60, 100$ dapat ditunjukkan dalam Jadual 2(a) dan Jadual 2(b).

Pekali penentu R^2 yang ditunjukkan dalam Jadual 2(a) dan Jadual 2(b) didapati begitu menghampiri nilai 1. Ini menunjukkan bahawa persamaan polinomial peringkat ke-5 didapati sesuai untuk mengambarkan hubungan antara nilai kritikal AD dan ZAD dengan parameter bentuk taburan GEV.

Ahmad et al [1] telah membina jadual nilai kritikal statistik AD bagi taburan GEV dengan parameter tak diketahui untuk nilai $\xi = 0, \alpha = 1$ dan $k = -0.2, -0.1, 0, 0.1$ dan 0.2 dan $n = 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 50$ dan 100. Hubungan antara nilai kritikal statistik AD dan parameter bentuk k yang berlainan dibina hanya dengan mempuratakan nilai kritikal statistik AD untuk setiap nilai k yang berlainan dan n yang tetap. Nilai kritikal statistik AD bagi taburan GEV bila parameter tak diketahui yang diperolehi oleh Ahmad et al [1] dikaji kesesuaiannya.

Jadual 2 (a): Pekali Regresi Dan Pekali Penentu R^2 bagi Hubungan Antara Nilai Kritikal AD Dengan Parameter Bentuk Taburan GEV

n	Aras Keertian	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	R^2
10	5%	0.5	-0.154	0.377	0.092	-0.213	-0.196	0.99993
	10%	0.419	-0.098	0.236	0.116	-0.024	-0.356	0.99997
30	5%	0.538	-0.254	0.657	0.252	-0.494	-0.549	0.99926
	10%	0.449	-0.161	0.372	0.178	0.002	-0.557	0.99976
60	5%	0.539	-0.219	0.889	-0.437	-0.929	1.217	0.99947
	10%	0.457	-0.155	0.554	-0.164	-0.359	0.276	0.9998
100	5%	0.540	-0.256	0.766	-0.007	0.421	-1.296	0.99989
	10%	0.460	-0.173	0.494	-0.013	0.437	-0.963	0.99985

Jadual 2(b): Pekali Regresi Dan Pekali Penentu R^2 bagi Hubungan Antara Nilai Kritikal ZAD Dengan Parameter Bentuk Taburan GEV

n	Aras Keertian	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	R^2
10	5%	3.408	-0.069	0.272	-0.024	-0.151	-0.077	1
	10%	3.371	-0.040	0.181	0.021	-0.015	-0.160	1
30	5%	3.392	-0.063	0.269	0.088	-0.266	-0.306	1
	10%	3.365	-0.042	0.154	0.114	-0.031	-0.387	1
60	5%	3.362	-0.028	0.292	-0.162	-0.443	0.408	1
	10%	3.346	-0.017	0.175	-0.062	-0.168	0.088	1
100	5%	3.343	-0.022	0.200	-0.032	-0.075	-0.172	1
	10%	3.331	-0.009	0.130	-0.038	0.001	-0.100	1

4.2 Pengujian Kesesuaian Nilai Kritikal

Dalam menentukkan kesesuaian nilai kritikal pengujian kesesuaian statistik yang dibangunkan, simulasi Monte Carlo dilakukan. Sebanyak 5000 sampel rawak bersaiz $n = 10, 30, 60$ dan 100 dijana dari taburan GEV dengan parameter $\xi = 0, \alpha = 1$ dan $k = -0.3, -0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2$ dan 0.3. Nilai statistik untuk setiap pengujian statistik dikira dan dibandingkan dengan jadual nilai kritikal yang telah dibangunkan masing-masing. Hipotesis yang diuji adalah

$$H_0 : F(x) = \text{Taburan GEV untuk kesemua } x \in (0,\ \infty)$$

melawan

$$H_1 : F(x) \neq \text{Taburan GEV}$$

Kadar penolakkan hipotesis nol bagi setiap taburan pada aras keertian 5% dan 10% (kadar penolakkan yang dibenarkan) dapat ditunjukkan dalam Jadual 3. Shapiro & Chen [12] menyatakan nilai kritkal yang dibangunkan adalah sesuai, jika kadar penolakkan hipotesis nol sesuatu taburan tidak berbeza daripada nilai aras keertian yang digunakan.

Keputusan yang ditunjukkan dalam Jadual 3 menunjukkan bahawa hampir kesemua pengujian statistik AD dan ZAD yang dibangunkan menghasilkan kadar penolakkan disekitar 5% iaitu bersamaan dengan aras keertian yang digunakan. Statistik AD berada dalam selang 0.44 dan 0.56, manakala statistik ZAD berada dalam selang 0.42 dan 0.52, pada aras keertian 5%. Pada aras keertian 10%, statistik AD berada antara 0.92 dan 0.102, manakala statistik ZAD berada dalam selang 0.93 dan 0.103. Secara keseluruhan didapati jadual nilai kritikal statistik yang dibangunkan adalah sesuai.

Jadual nilai kritikal bagi statistik AD yang dibangunkan oleh Ahmad et al [1] didapati mempunyai kadar penolakan yang jauh berbeza dengan aras keertian yang digunakan. Nilai statistik AD didapati menghasilkan kadar penolakkan lebih tinggi berbanding aras keertian terutamanya pada nilai $k \leq -0.2$ dan lebih rendah pada nilai $k > 0.1$. Ini menunjukkan jadual nilai kritikal yang dibina oleh Ahmad et al [1] hanya sesuai untuk menguji taburan GEV pada nilai k antara 0.1 dan 0.1.

5 Kekuatan Pengujian Statistik

Simulasi Monte-Carlo digunakan untuk membandingkan kesesuaian pengujian statistik berdasarkan nilai kritikal dari taburan normal dan taburan GEV. Kesesuaian setiap pengujian statistik dinilai berdasarkan kadar penolakkan hipotesis nol.

Pengujian statistik yang menghasilkan kadar penolakkan tertinggi adalah pengujian statistik yang terbaik. Bagi menentukkan kesesuaian pengujian statistik yang digunakan, sebanyak 5000 sampel bersaiz $n = 10, 30, 60$ dan 100 dijana dari 7 taburan alternatif dan nilai setiap statistik ditentukan. Taburan alternatif yang digunakan dalam kajian ini adalah seperti berikut:

5.1 Taburan Lognormal 3

Fungsi ketumpatan bagi taburan Lognormal 3 (LN3) boleh ditulis sebagai

$$f(x) = \frac{1}{\sigma(x-\xi)\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x-\xi)-\mu}{\sigma}\right)^2\right], \xi < x < \infty, \sigma^2 > 0 \tag{12}$$

Jadual 3: Perbandingan Kekuatan Pengujian Kesesuaian Statistik Bagi Taburan GEV Berdasarkan 10000 Lelaran Menggunakan Taburan Populasi GEV untuk k Berlainan

Parameter	Saiz	$\alpha = 0.10$			$\alpha = 0.05$		
Taburan GEV	Sampel	AD	ZAD	AHMAD	AD	ZAD	AHMAD
-0.3	10	0.099	0.093	0.116	0.049	0.045	0.062
	30	0.096	0.101	0.137	0.047	0.051	0.078
	60	0.102	0.106	0.162	0.049	0.050	0.099
	100	0.101	0.100	0.175	0.051	0.051	0.113
-0.2	10	0.100	0.098	0.093	0.052	0.047	0.045
	30	0.100	0.102	0.128	0.051	0.048	0.074
	60	0.101	0.099	0.137	0.047	0.049	0.077
	100	0.095	0.094	0.140	0.049	0.046	0.086
-0.1	10	0.097	0.095	0.093	0.049	0.045	0.045
	30	0.097	0.094	0.111	0.046	0.043	0.058
	60	0.098	0.096	0.109	0.046	0.044	0.058
	100	0.095	0.097	0.118	0.048	0.042	0.061
0	10	0.092	0.093	0.093	0.048	0.043	0.045
	30	0.099	0.094	0.099	0.049	0.044	0.051
	60	0.097	0.093	0.095	0.048	0.045	0.046
	100	0.097	0.094	0.097	0.054	0.045	0.053
0.1	10	0.093	0.095	0.093	0.049	0.043	0.045
	30	0.099	0.097	0.087	0.044	0.044	0.040
	60	0.097	0.094	0.086	0.048	0.045	0.040
	100	0.098	0.094	0.090	0.056	0.049	0.046
0.2	10	0.099	0.100	0.093	0.052	0.048	0.045
	30	0.098	0.099	0.083	0.047	0.047	0.041
	60	0.101	0.097	0.087	0.052	0.045	0.042
	100	0.100	0.095	0.087	0.049	0.046	0.040
0.3	10	0.098	0.103	0.093	0.052	0.052	0.045
	30	0.097	0.103	0.084	0.050	0.049	0.042
	60	0.101	0.101	0.090	0.053	0.049	0.045
	100	0.097	0.096	0.092	0.053	0.049	0.050

dengan $\xi = 0$, $\mu = 1$ dan $\sigma = 0.205, 0.413, 0.628, 0.852, 1.093$ iaitu berpadanan dengan pekali kepencongan L-momen, $\tau_3 = 1, 2, 3, 4, 5$ masing-masing.

5.2 Taburan Pearson 3

Fungsi ketumpatan bagi taburan Pearson 3 (P3) boleh ditulis sebagai

$$f(x) = \frac{\alpha^{-k}}{\Gamma(k)} (x - \xi)^{k-1} \exp\left(-\frac{x - \xi}{\alpha}\right), \; \xi < x < \infty, \; k > 0 \tag{13}$$

dengan $\xi = 0$, $\alpha = 1$ dan $k = 10.707, 2.732, 1.233, 0.689, 0.422$ iaitu berpadanan dengan pekali kepencongan L-momen, $\tau_3 = 1, 2, 3, 4, 5$ masing-masing.

5.3 Taburan Logistik Teritlak

Fungsi taburan logistik teritlak "Generalized Logistik (GL) diberikan oleh

$$f(x) = \frac{1}{\alpha}\left\{1 - k\left(\frac{x - \xi}{\alpha}\right)\right\}^{\left(\frac{1}{k} - 1\right)} \left[1 + \left\{1 - k\left(\frac{x - \xi}{\alpha}\right)\right\}^{1/k}\right]^{-2}$$

dengan $\xi = 0$, $\alpha = 1$ dan $k = -0.1, -0.2, -0.3, -0.4, -0.5$ iaitu berpadanan dengan pekali kepencongan L-momen, $\tau_3 = 1, 2, 3, 4, 5$ masing-masing.

5.4 Taburan F

Fungsi taburan F diberikan oleh

$$f(x) = \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(v_1 + v_2)\right] (v_1/v_2)^{v/2} x^{(v_1 - 2)/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}v_1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}v_2\right)\left[1 + (v_1/v_2)\, x\right]^{(v_1 + v_2)/2}}$$

dengan $(v_1, \; v_2) = (40, \; 10)$.

5.1 5.5 Taburan Beta

Fungsi taburan beta diberikan oleh

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha, \; \beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} x^{\alpha} (1 - x)^{\beta - 1}$$

dengan $(\alpha, \; \beta) = (2, 2)$.

5.2 5.6 Taburan Normal

Fungsi taburan Normal diberikan oleh

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

dengan $(\mu, \; \sigma) = (100, 5)$.

5.3 5.7 Taburan Eksponen

Fungsi taburan eksponen diberikan oleh

$$f(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x}{\alpha}\right)$$

dengan $\alpha = 0.5$.

6 Perbincangan

Kekuatan statistik AD dan ZAD bagi menguji kesesuaian taburan GEV dapat ditunjukkan dalam Jadual 4(a) dan Jadual 4(b). Hasil analisis menunjukkan bahawa statistik ZAD menghasilkan kadar penolakkan yang lebih tinggi berbanding statistik AD untuk hampir kesemua taburan alternatif yang digunakan kecuali apabila data populasi dijana dari taburan GEV dan LN3 untuk nilai $\tau_3 \leq 0.2$ pada kedua-dua aras keertian 5% dan 10%. Ini menunjukkan statistik ZAD adalah lebih baik berbanding statistik AD dalam menguji kesesuaian bagi taburan GEV.

7 Kesimpulan

Dalam kertas ini kami cuba membina jadual nilai kritikal statistik AD berdasarkan statistik khi-kuasa dua Pearson dan nisbah kebolehjadian nibah bagi taburan GEV dengan parameter tak diketahui. Persamaan regresi dibina untuk mewakili nilai kritikal statistik untuk setiap nilai parameter yang berbeza dan saiz sampel yang tetap. Kesesuaian jadual nilai kritikal yang dibina diuji dan dibandingkan dengan kesesuaian jadual nlai kritikal statistik AD yang telah dibina oleh Ahmad et al [1]. Kekuatan statistik AD dan ZAD bagi menguji kesesuaian taburan GEV untuk dipadankan dengan sebarang data dikaji berdasarkan simulasi Monte Carlo.

Hasil analisis menunjukkan bahawa jadual nilai kritikal yang dicadangkan lebih baik berbanding dengan jadual nilai kritikal yang dibina oleh Ahmad et al [1]. Statistik ZAD yang merupakan pengujian statistik yang terkini didapati lebih baik untuk digunakan dalam menguji kesesuaian taburan GEV untuk dipadankan dengan sebarang data.

Rujukan

[1] M.I. Ahmad, C.D.Sinclair & B.D. Spurr, *Assessment of Flood Frequency Models Using Empirical Distribution Function Statistics,* Water Resources Research, Vol. (24)8 (1988), 1323-1328.

[2] J.U. Chowdhury, J.R. Stedinger & L. Lu, *Goodness-of-Fit Tests for Regional Generalized Extreme Value Flood Distributions,* Water Resources Research, Vol. (27)7 (1991), 1765-1776.

[3] R.B. DAgostino & M.A. Stephens, *Goodness-of-fit Techniques,* Dekker, New York, 1986.

Jadual 4 (a): Perbandingan Kadar Penolakkan Bagi Taburan GEV Berdasarkan Statistik AD dan ZAD Menggunakan Simulasi Berdasarkan Data Yang Dijana Dari Taburan GEV, LN3, P3 dan GL

TABURAN		GEV				LN3				P3				GL			
Pekali		10%		5%		10%		5%		10%		5%		10%		5%	
L-T3	n	AD	ZAD	AD	ZAD	AD	ZAD	AD	ZAD	AD	ZAD	AD	ZAD	AD	ZAD	AD	ZAD
0.1	10	0.094	0.095	0.049	0.044	0.094	0.096	0.050	0.045	0.114	0.126	0.053	0.049	0.103	0.111	0.053	0.050
	30	0.097	0.095	0.047	0.045	0.104	0.105	0.046	0.049	0.230	0.369	0.121	0.188	0.185	0.197	0.108	0.125
	60	0.102	0.098	0.047	0.042	0.097	0.092	0.049	0.048	0.413	0.724	0.261	0.543	0.267	0.278	0.179	0.192
	100	0.098	0.092	0.053	0.050	0.108	0.105	0.055	0.050	0.656	0.949	0.490	0.877	0.365	0.396	0.262	0.292
0.2	10	0.094	0.092	0.048	0.043	0.092	0.092	0.045	0.041	0.120	0.126	0.054	0.043	0.100	0.104	0.049	0.047
	30	0.092	0.092	0.041	0.039	0.098	0.089	0.043	0.038	0.232	0.375	0.119	0.186	0.149	0.144	0.078	0.088
	60	0.094	0.089	0.047	0.039	0.093	0.103	0.047	0.044	0.432	0.750	0.283	0.578	0.193	0.194	0.121	0.124
	100	0.093	0.093	0.046	0.041	0.101	0.108	0.049	0.049	0.654	0.953	0.484	0.879	0.261	0.265	0.174	0.176
0.3	10	0.088	0.088	0.044	0.042	0.096	0.086	0.041	0.035	0.127	0.135	0.057	0.054	0.100	0.087	0.052	0.047
	30	0.093	0.099	0.044	0.045	0.108	0.118	0.044	0.044	0.217	0.351	0.109	0.181	0.122	0.121	0.063	0.068
	60	0.090	0.094	0.043	0.042	0.111	0.132	0.050	0.058	0.417	0.729	0.270	0.544	0.148	0.140	0.083	0.079
	100	0.095	0.099	0.048	0.043	0.133	0.203	0.073	0.104	0.643	0.953	0.488	0.880	0.178	0.155	0.104	0.088
0.4	10	0.111	0.107	0.054	0.051	0.113	0.108	0.051	0.043	0.121	0.126	0.052	0.049	0.116	0.109	0.061	0.056
	30	0.106	0.118	0.054	0.057	0.125	0.161	0.059	0.062	0.226	0.360	0.114	0.184	0.115	0.114	0.056	0.059
	60	0.104	0.109	0.054	0.058	0.166	0.242	0.087	0.117	0.415	0.733	0.272	0.554	0.125	0.118	0.071	0.068
	100	0.105	0.120	0.056	0.058	0.230	0.373	0.130	0.223	0.643	0.953	0.488	0.880	0.134	0.118	0.077	0.067
0.5	10	0.120	0.121	0.060	0.056	0.143	0.142	0.064	0.055	0.121	0.126	0.052	0.049	0.130	0.115	0.066	0.061
	30	0.103	0.112	0.049	0.053	0.188	0.267	0.096	0.118	0.216	0.374	0.111	0.190	0.105	0.111	0.057	0.057
	60	0.120	0.131	0.065	0.079	0.290	0.447	0.169	0.268	0.417	0.735	0.269	0.553	0.118	0.130	0.069	0.077
	100	0.116	0.133	0.062	0.065	0.390	0.608	0.255	0.432	0.668	0.956	0.505	0.890	0.114	0.122	0.057	0.065

Jadual 4 (b): Perbandingan Kadar Penolakkan Bagi Taburan GEV Berdasarkan Statistik AD dan ZAD Menggunakan Simulasi Berdasarkan Data Yang Dijana Dari Taburan EKSP, Normal, Beta Dan F

Taburan	EKSP(0.5)				NORMAL				BETA(2, 2)				F(40, 10)			
	10%		5%		10%		5%		10%		5%		10%		5%	
n	AD	ZAD	AD	ZAD	AD	ZAD	AD	ZAD	AD	ZAD	AD	ZAD	AD	ZAD	AD	ZAD
10	0.130	0.135	0.058	0.054	0.115	0.123	0.062	0.066	0.105	0.121	0.052	0.052	0.096	0.093	0.047	0.043
30	0.258	0.404	0.141	0.220	0.112	0.116	0.061	0.063	0.138	0.179	0.068	0.077	0.108	0.100	0.051	0.044
60	0.463	0.767	0.316	0.588	0.130	0.132	0.072	0.077	0.221	0.357	0.135	0.200	0.098	0.101	0.043	0.046
100	0.734	0.969	0.585	0.921	0.141	0.152	0.079	0.091	0.358	0.613	0.232	0.441	0.092	0.114	0.044	0.048

[4] J.W. Evans, R.A. Johnson & D.W. Green, *Two and Three Parameter Weibull Goodness-of-Fit Tests,* U.S.A. Department of Agriculture, Forest Service, Forest Products Laboratory (1989), 1-27.

[5] J. A. Greenwood, J.M. Landwehr, N. C. Matals & J.R. Wallis, *Probability weighted moments: definition and relation to parameters of several distributions expressible in inverse form,* Water Resour. Res., 15(5)(1979), 1049-1054.

[6] H. Gunes, D.C. Dietz, P.F. Auclair & A.H. Moore, *Modified Goodness-of-fit Tests for the Inverse Gaussian Distribution,* Computational Statistics & Data Analysis. 24(1997), 63-77.

[7] J.R.M. Hosking, *L-moments: Analysis and estimation of distributions using linear combinations of order statistics,* J. R. Statist. Soc., Ser. B, 52(1) (1990), 105-124.

[8] D.R. Maidment, *Handbook of Hydrology,* McGraw-Hill, Inc. (1992).

[9] R.J. Pavur, R.L. Edgeman & R.C. Scott, *Quadratic Statistics for the Goodness-of-Fit Test of the Inverse Gaussian Distribution,* IEEE Transactions on Reliability. Vol(41)1(1992), 118-123.

[10] J. Pokhrel, *Regional Flood Frequency Analysis For The Island of Newfoundland, Canada Using L-Moments,* Master Thesis, Memorial University of Newfoundland, 2002.

[11] A.Sankarasubramaniam & K. Srinivasan, *Investigation and Comparison of Sampling Properties of L-Moments and Conventional Moments,* Journal of Hydrology, 218(1999), 13-24.

[12] S.S. Shapiro & L. Chen, *Composite Tests For The Gamma Distribution,* Journal of Quality Technology, 33(2001), 47-59.

[13] M.Y. Sulaiman, W.M. Hlaing, M.A. Wahab & A. Zakaria, *Application of Probability Models to Malaysian Sunshine Data,* International Journal of Energy Data, 22(1998), 833-842.

[14] Q.J. Wang, *Approximate Goodness-of-fit Tests of Fitted Generalized Extreme Value Distributions Using LH Moments,* Water Resources Research. Vol. (34)12(1998), 3497-3502.

[15] J. Zhang & Y. Wu, *Likelihood-Ratio Tests for Normality,* Computational Statistics & Data Analysis, Vol(49) (2005), 709-721.