

PENYELESAIAN MASALAH PERSAMAAN RESAPAN-OLAKAN SATU DIMENSI SECARA SELARI DAN BERJUJUKAN

Lizawati Mi Yusuf, Mohd Shahizan Othman

Faculty of Computer Science and Information Systems
University Teknologi Malaysia
81300 Skudai, Johor

Email: {lizawati,shahizan}@utm.my

Abstrak: Artikel ini membincangkan tentang penyelesaian masalah persamaan resapan-olakan satu dimensi dengan menggunakan kaedah Pengenduran Berlebihan Berturut-turut Merah Hitam (PBBMH) dan Gauss-Seidel Merah Hitam (GSMH) secara selari dan berjujukan. Masalah ini telah diselesaikan dengan menggunakan komputer selari bagi sistem memori teragih yang terdiri daripada 18 buah komputer peribadi dengan pemproses Intel Pentium IV. Persekitaran dan bahasa pengaturcaraan yang digunakan bagi menyelesaikan masalah ini adalah Mesin Selari Ingatan Maya (PVM) dan C. Secara keseluruhannya, hasil kajian ini telah berjaya membuktikan teori yang dikemukakan oleh Foster (1995) adalah benar di mana peratus kecekapan yang diperolehi akan berkurangan dan faktor kelajuan yang diperolehi pula akan meningkat apabila bilangan pemproses semakin bertambah. Hasil kajian juga mendapati bahawa penyelesaian menggunakan kaedah GSMH dan PBBMH secara selari adalah lebih cepat berbanding penyelesaian secara berjujukan terutama apabila bilangan pemproses meningkat. Penyelesaian secara selari yang lebih cepat ini dapat menjimatkan masa terutama dalam menyelesaikan masalah yang berskala besar.

Abstract: *This article discusses the solution of one-dimensional convection-diffusion equations by using Successive Over-Relaxation Red Black (SORRB) and Gauss-Seidel Red Black (GSRB) method for parallel and sequential. The implementation for this method has been performed on parallel computers for distributed memory systems using Parallel Virtual Machine (PVM) and C which used 18 personal computers with Intel Pentium IV processor. This research successfully results in affirmation of the theories presented by Foster (1995) which proposed that the percentage of efficiency decreases and the speedup factor increases when the numbers of processors are increasing. The research result also shows that the parallelization of GSRB and SORRB method is faster than sequential especially when the number of processors increased. As a conclusion, problem solving by using parallelization will reduce execution time especially in solving large scale problems.*

Keywords: Successive Over-Relaxation Red Black (SORRB), Gauss-Seidel Red Black (GSRB), Convection-Diffusion Equations, Parallel Virtual Machine (PVM)

1. PENGENALAN

Sistem komputer selari merupakan sistem yang terdiri daripada beberapa komputer yang tidak bersandar yang disambungkan di antara satu dengan yang lain dengan cara-cara tertentu. Sistem ini akan meningkatkan kadar kelajuan pengiraan dan menghasilkan prestasi yang lebih optimum dalam menyelesaikan sesuatu masalah (Wilkinson dan Allen, 1999). Oleh itu, kajian ini akan menguji sejauh mana keberkesanan di antara dua kaedah lelaran iaitu kaedah Gauss-Seidel Merah Hitam (GSMH) dan kaedah Pengenduran Berlebihan Berturut-Turut Merah Hitam (PBBMH) dalam menyelesaikan masalah persamaan resapan-olakan satu dimensi secara selari dan berjujukan.

2. MODEL MASALAH

Masalah yang telah diselesaikan dalam kajian ini adalah masalah persamaan resapan-olakan satu dimensi pada masa, yang melibatkan persamaan, syarat sempadan (SS) dan syarat awal (SA) seperti berikut (Evans & Abdullah, 1985):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - w \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

yang mana v dan w adalah parameter pekali bagi resapan dan olakan.

$$\text{Syarat sempadan (SS): } \left. \begin{array}{l} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 1 \end{array} \right\} 0 < t < \infty ,$$

$$\text{Syarat awal (SA): } u(x,0) = 0 , \quad 0 \leq x \leq 1 .$$

Penyelesaian tepat untuk persamaan (1) adalah

$$u(x,t) = \frac{e^{wv(x-1)t} - 1}{e^{wv} - 1} - \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p p \pi}{(p\pi)^2 + \left(\frac{w}{2v}\right)^2} e^{-wv(x-1)t} \sin(p\pi x) e^{-\left\{p\pi^2 + \frac{w^2}{4v^2} + w\right\}t} \quad (2)$$

Dalam kajian ini, persamaan (1) akan diwakili oleh persamaan penghampiran beza terhingga dengan menggunakan kaedah tersirat iaitu kaedah Crank-Nicolson. Kaedah tersirat adalah kaedah yang lebih baik berbanding kaedah tidak tersirat kerana ia membenarkan saiz

grid yang lebih besar dipilih; maka ia dapat mengurangkan ralat pembundaran (Farlow, 1989). Penghampiran beza terhingga bagi sesuatu persamaan terbitan separa boleh diperolehi melalui kembangan siri Taylor. Oleh itu, sistem persamaan linear yang dapat dijanakan daripada persamaan (1) adalah sistem persamaan linear tiga pepenjuor seperti yang diberikan oleh persamaan berikut:

$$A_{2x} u_{j-1} = f_j^a \quad (3)$$

Persamaan (1.3) ini, boleh diwakili dalam bentuk matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & -\alpha_3 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & -\alpha_3 & & & & & 0 \\ 0 & -\alpha_2 & \alpha_1 & -\alpha_3 & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & & -\alpha_2 & \alpha_1 & -\alpha_3 & 0 \\ \vdots & & & & & & 0 & -\alpha_2 & \alpha_1 & -\alpha_3 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & -\alpha_2 & \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,j-1} \\ u_{2,j-1} \\ u_{3,j-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{m,j-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 u_{0,j-1} - f_{1,j}^a \\ f_{2,j}^a \\ f_{3,j}^a \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_3 u_{m-1,j-1} - f_{m,j}^a \end{bmatrix} \quad (4)$$

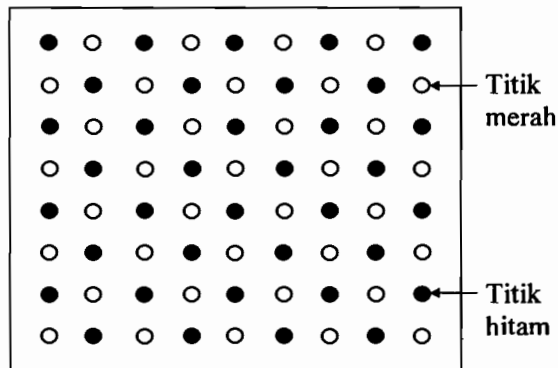
3. KAEDAH GAUSS-SEIDEL MERAH HITAM (GSMH)

Kaedah ini sentiasa menggunakan nilai terkini untuk mengira nilai u_i pada lelaran ke- $(k+1)$ (Abdul Rahman, 1990; Smith, 1978). Kaedah ini mempunyai kadar penumpuan yang tinggi berbanding kaedah Jacobi kerana nilai terkini yang digunakan dalam setiap lelaran akan mengakibatkan bilangan lelaran yang diperlukan untuk menumpu adalah sedikit (Modi, 1988; Wilkinson dan Allen, 1999). Bentuk am persamaan bagi penyelesaian sistem persamaan linear (1.4) dengan menggunakan kaedah Gauss-Seidel adalah:

$$u_i^{k+1} = \frac{f_i - \alpha_2 u_{i-1}^{k+1} - \alpha_3 u_{i+1}^k}{\alpha_1} \quad (5)$$

Oleh kerana, dalam kaedah Gauss-Seidel susunan pengemaskinian nilai-nilai adalah secara berjujukan, maka ciri ini adalah tidak bersesuaian untuk digunakan dalam persekitaran kerja selari (Wilkinson dan Allen, 1999). Walaupun begitu, susunan tersebut telah diubah suai untuk menjadikannya lebih relevan dengan persekitaran kerja selari iaitu dengan menggunakan susunan merah hitam (Rajah 1). Dalam susunan merah hitam, titik-titik akan dibahagikan kepada titik-titik merah dan titik-titik hitam di mana proses pengiraan titik-titik tersebut akan melibatkan dua fasa. Fasa pertama, titik-titik hitam akan dikira secara serentak.

Fasa kedua, titik-titik merah pula akan dikira secara serentak. Proses pengiraan ini akan diulang sehingga nilai bagi titik-titik merah dan hitam menumpu.



Rajah 1 Pengiraan mengikut susunan merah hitam

4. KAEDAH PENGENDURAN BERLEBIHAN BERTURUT-TURUT MERAH HITAM (PBBMH)

Kaedah ini akan menggunakan nilai $\hat{u}_i^{(k+1)}$ yang diperolehi melalui kaedah Gauss-Seidel bagi mengira nilai $u_i^{(k+1)}$ dengan mengambil purata berpemberat di antara nilai $\hat{u}_i^{(k+1)}$ dan u_i^k . Bentuk am persamaan bagi penyelesaian sistem persamaan linear (1.4) dengan menggunakan kaedah Pengenduran Berlebihan Berturut-turut adalah:

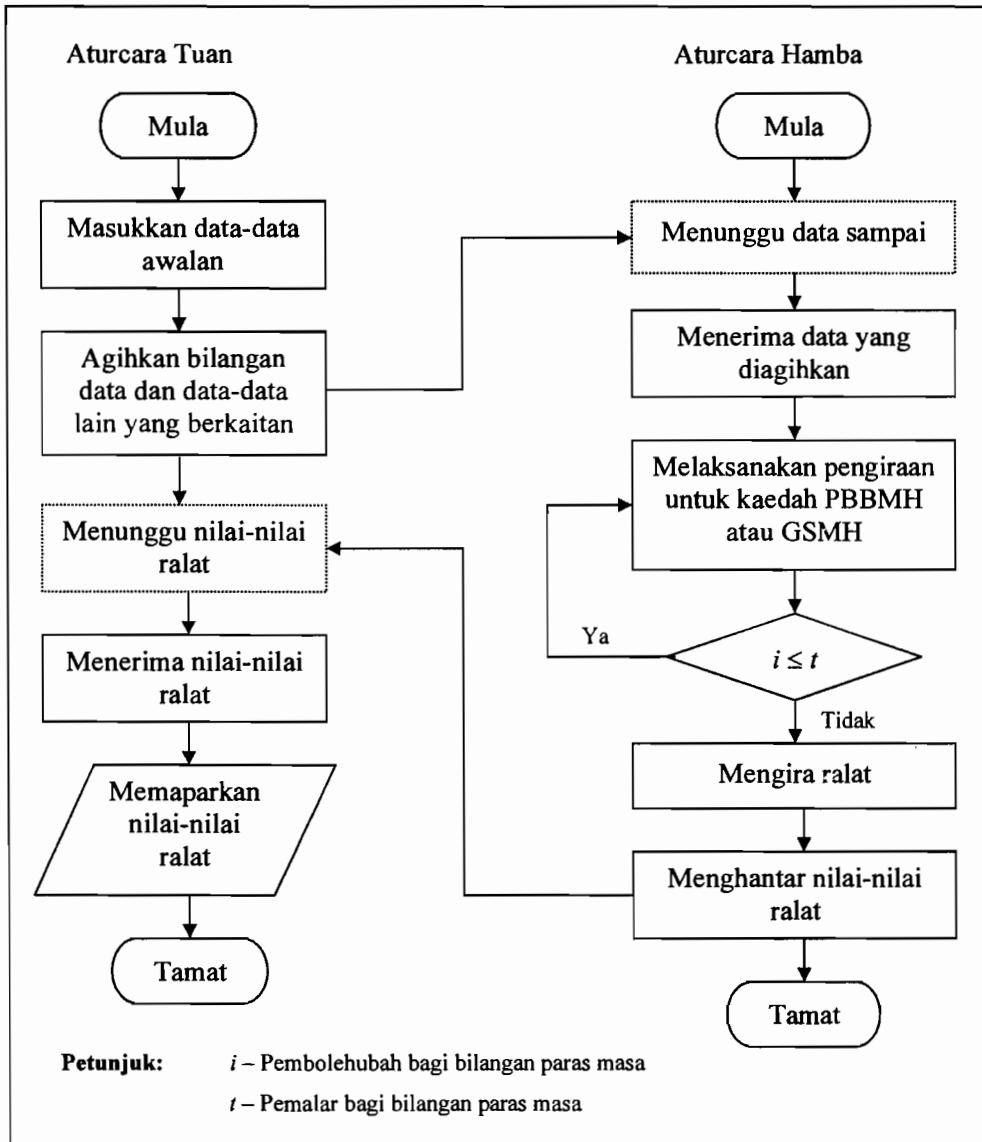
$$u_i^{(k+1)} = \omega \hat{u}_i^{(k+1)} + (1 - \omega) u_i^k \quad (6)$$

Nilai pemberat, ω adalah suatu parameter yang tidak bergantung kepada nilai i dan k . Nilai ω yang paling sesuai adalah dalam julat 0 hingga 2 (Smith, 1978 dan Abdul Rahman, 1990). Pemilihan nilai ω yang optima akan menyebabkan suatu nilai penghampiran yang lebih baik mungkin akan diperolehi dan sekaligus ia akan mempercepatkan kadar penumpuan.

Perlaksanaan kaedah PBBMH adalah sama seperti kaedah GSMH yang mana dalam susunan merah hitam, titik-titik dibahagikan kepada titik-titik merah dan titik-titik hitam (rujuk Rajah 1). Proses pengiraan titik-titik tersebut melibatkan dua fasa. Fasa pertama, titik-titik hitam akan dikira. Fasa kedua, pengiraan titik-titik merah pula dilaksanakan. Proses pengiraan ini berulang sehingga nilai-nilai bagi titik merah dan hitam menumpu.

5. REKABENTUK ATURCARA SELARI

Rekabentuk aturcara selari adalah asas kepada pelaksanaan kaedah PBBMH dan GSMH pada persekitaran kerja selari. Dalam rekabentuk aturcara selari ini, model tuan-hamba telah digunakan yang mana ia melibatkan dua aturcara iaitu aturcara tuan dan aturcara hamba. Rajah 2 menunjukkan carta alir pelaksanaan kaedah selari yang menggunakan model tuan-hamba.



Rajah 2 Carta alir bagi pelaksanaan kaedah PBBMH dan GSMH pada persekitaran kerja selari

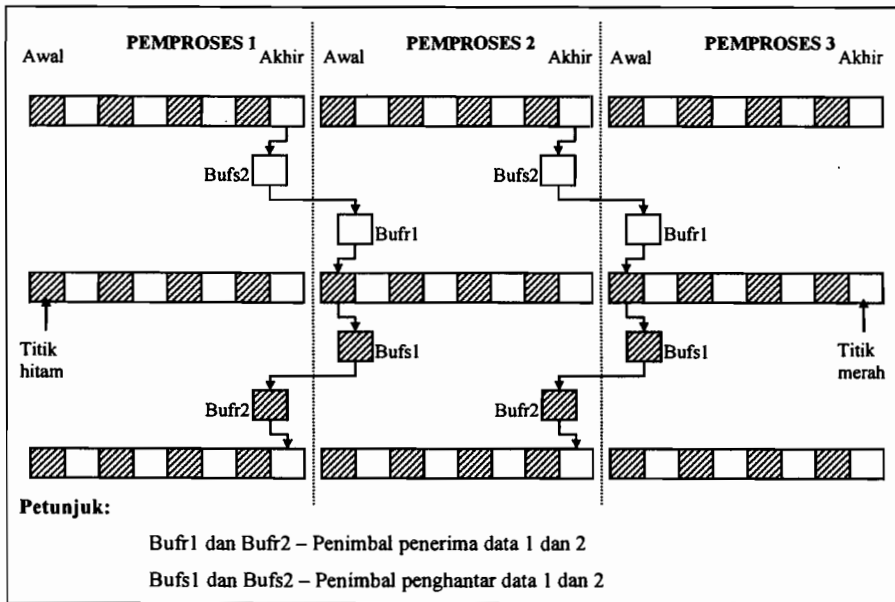
Aturcara tuan adalah aturcara yang digunakan untuk mengagihkan data-data yang diperlukan dan bilangan titik yang ingin diselesaikan kepada aturcara hamba. Sementara itu, aturcara hamba yang sedang menunggu, akan menerima data yang telah diagihkan dan kemudian melaksanakan proses pengiraan bagi operasi-operasi yang terlibat dalam kaedah PBBMH dan GSMH. Proses pengiraan ini diulang mengikut bilangan paras masa yang ditetapkan. Setelah selesai pengiraan tersebut, aturcara hamba melaksanakan proses pengiraan ralat dan kemudian menghantar hasilnya kepada aturcara tuan. Aturcara tuan yang menunggu akan menerima dan memaparkan hasil pengiraan ralat tersebut. Proses pada aturcara tuan dan hamba akan tamat selepas menerima dan menghantar hasil akhir bagi keseluruhan proses pengiraan yang terlibat.

6. PERLAKSANAAN ATURCARA SELARI

Berdasarkan kepada rekabentuk kaedah PBBMH dan GSMH selari yang diterangkan pada subtopik 5, bagi membolehkan kedua-dua kaedah tersebut dilaksanakan pada persekitaran kerja selari, maka teknik penguraian data telah digunakan. Melalui teknik ini, data telah dibahagikan kepada beberapa subdomain untuk diperuntukkan kepada setiap pemproses yang terlibat pada persekitaran kerja selari. Bilangan subdomain tidak semestinya sama dengan bilangan pemproses (Michielse 1995). Manakala, bilangan pemproses yang terlibat dalam kajian ini, secara relatifnya adalah kecil berbanding bilangan titik yang ingin diselesaikan.

Perlaksanaan kaedah PBBMH dan GSMH dalam persekitaran kerja selari melibatkan dua fasa kerja. Pertama adalah fasa pengiraan dalam subdomain yang melibatkan proses pengiraan mengikut kaedah PBBMH atau GSMH dan pengiraan nilai raja. Fasa kedua adalah pengiraan pada sempadan yang mana ia juga melibatkan proses pengiraan mengikut kaedah PBBMH atau GSMH dan pengiraan nilai raja yang merentasi sempadan.

Rajah 3 menunjukkan proses penghantaran data bagi susunan titik merah dan hitam dalam menyelesaikan masalah satu dimensi dengan menggunakan tiga pemproses. Proses penghantaran bermula apabila setiap pemproses akan menyimpan titik merah (berbentuk segiempat) yang berada di sempadan pada penimbal dan kemudian menghantarnya kepada pemproses yang berada disebelahnya. Setelah itu, titik hitam (berbentuk bulat) yang berada pada pemproses disebelahnya itu akan dikemaskini menggunakan nilai titik merah tersebut. Proses seterusnya, setiap pemproses akan menyimpan titik hitam (yang telah dikemaskini) yang berada di sempadan pada penimbal dan kemudian menghantarnya kepada pemproses yang berada disebelahnya. Titik merah yang berada pada pemproses disebelahnya itu akan dikemaskini menggunakan nilai titik hitam tersebut. Proses ini berulang sehingga nilai bagi kedua-dua titik tersebut menumpu.



Rajah 3 Proses penghantaran data merentasi sempadan bagi masalah satu dimensi

Secara ringkasnya, proses-proses utama yang terlibat dalam pelaksanaan kaedah PBBMH dan GSMH selari adalah seperti berikut:

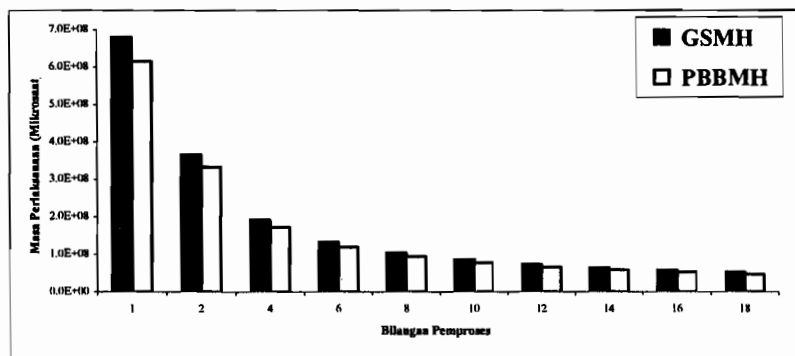
- a. Pengagihan titik-titik secara sama rata kepada setiap pemproses akan dilaksanakan. Katakan bilangan titik yang ingin diselesaikan adalah 128 dan bilangan pemproses yang terlibat adalah 4. Maka, setiap pemproses akan menerima 32 titik.
- b. Proses pengiraan menggunakan kaedah PBBMH atau GSMH akan dilaksanakan.
 - i. Pengemaskinian semua titik hitam (merah) akan dilaksanakan secara serentak.
 - ii. Komunikasi di antara pemproses-pemproses yang bersebelahan akan berlaku untuk memberikan maklumat pengemaskinian titik hitam (merah) kepada titik merah (hitam) secara serentak.
 - iii. Semua titik merah (hitam) akan dikemaskini secara selari.
 - iv. Komunikasi di antara pemproses-pemproses yang bersebelahan akan dilakukan untuk memberikan maklumat pengemaskinian titik merah (hitam) kepada titik hitam (merah) secara serentak.
 - v. Pengiraan nilai raja akan dilaksanakan secara serentak.
 - vi. Komunikasi di antara pemproses-pemproses yang bersebelahan akan dilaksanakan untuk menghantar nilai raja yang berada di sempadan.
- c. Proses-proses b(i) hingga (vi) akan diulang selagi syarat yang ditetapkan masih belum dipenuhi atau selagi nilai bagi titik-titik tidak menumpu.

- d. Proses-proses (a) hingga (c) akan diulang mengikut bilangan paras masa yang dikehendaki. Dalam kajian ini, bilangan paras masa yang ditetapkan adalah 50.

6. PENGUJIAN DAN HASIL UJIKAJI

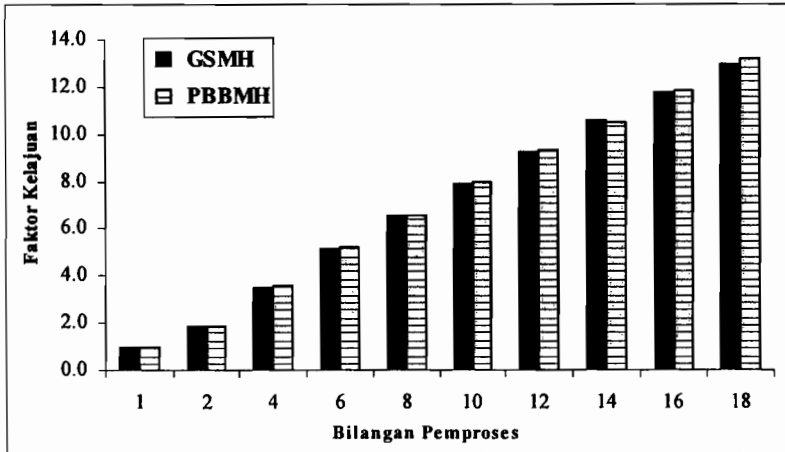
Dalam kajian ini, ujikaji berangka yang dilaksanakan terhadap kaedah GSMH dan PBBMH secara selari dan berjjukan berdasarkan kepada tiga parameter prestasi iaitu masa peraksanaan, kadar kelajuan dan peratus kecekapan. Bilangan maksimum pemproses yang terlibat adalah 18 buah. Bilangan titik, m yang telah dikaji adalah 2097152. Ujian penumpuan pula menggunakan nilai toleransi, $\epsilon = 10^{-10}$. Nilai bagi pemberat, $\omega = 1.050$, $\Delta x = m^{-1}$ dan $\Delta t = 5.0 * (\Delta x)^2$. Manakala bilangan paras masa, $t = 50$. Keputusan berangka yang diperolehi daripada ujikaji yang dijalankan telah diplotkan dalam bentuk graf seperti pada Rajah 4, 5 dan 6. Graf tersebut merupakan graf perbandingan di antara masa peraksanaan, kadar kelajuan dan peratus kecekapan untuk kaedah GSMH dan PBBMH secara selari serta berjjukan.

Rajah 4 menunjukkan bahawa masa peraksanaan bagi penyelesaian masalah persamaan resapan-olakan satu dimensi dengan menggunakan kaedah GSMH dan PBBMH secara selari adalah lebih singkat berbanding penyelesaian menggunakan kaedah GSMH dan PBBMH secara berjjukan. Masa peraksanaan yang terlibat merangkumi masa pengiraan dan masa komunikasi di antara pemproses-pemproses. Oleh kerana, penyelesaian secara selari akan membolehkan beban kerja diagihkan secara sama rata kepada setiap pemproses, maka ini akan menyebabkan proses pengiraan yang perlu dilaksanakan oleh setiap pemproses semakin berkurangan. Ini sekaligus akan mengakibatkan masa peraksanaan yang diperlukan untuk pengiraan tersebut menjadi semakin singkat. Selain itu, berdasarkan kepada graf pada Rajah 5 juga, didapati bahawa semakin bertambahnya bilangan pemproses yang digunakan, maka semakin singkat masa yang diperlukan untuk proses pengiraan bagi penyelesaian masalah tersebut.

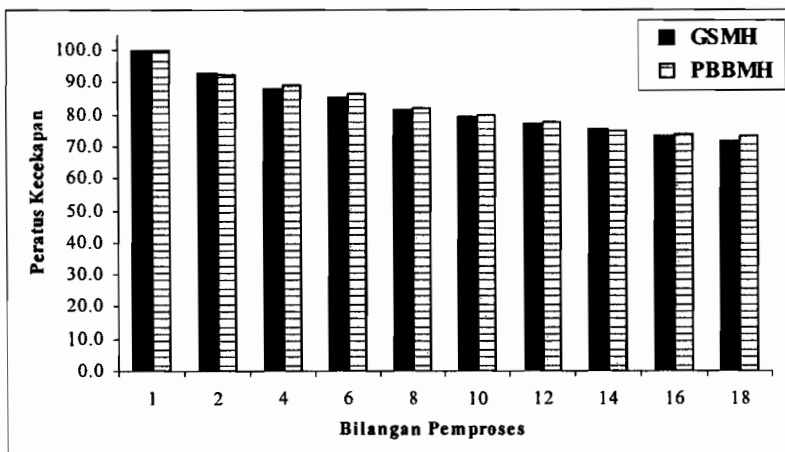


Rajah 4 Graf perbandingan masa peraksanaan kaedah GSMH dan PBBMH secara selari serta berjjukan

Rajah 5 pula menunjukkan bahawa faktor kelajuan untuk kaedah GSMH dan PBBMH selari adalah lebih baik berbanding kaedah GSMH dan PBBMH berjukkan. Selain itu, rajah tersebut juga menunjukkan bahawa faktor kelajuan akan meningkat apabila bertambahnya bilangan pemproses yang terlibat dalam penyelesaian secara selari. Menurut Wilkinson dan Allen (1999), kelajuan maksimum yang boleh dicapai oleh sesuatu aturcara selari yang menggunakan n pemproses adalah n .



Rajah 5 Graf perbandingan faktor kelajuan kaedah GSMH dan PBBMH secara selari serta berjukkan



Rajah 6 Graf perbandingan peratus kecekapan kaedah GSMH dan PBBMH secara selari serta berjukkan

Manakala, Rajah 6 menunjukkan bahawa peratus kecekapan untuk kaedah GSMH dan PBBMH berjukkan adalah lebih baik berbanding kaedah GSMH dan PBBMH selari. Peratus kecekapan maksimum yang boleh dicapai adalah 100% iaitu apabila semua pemproses digunakan sepanjang masa semasa proses pengiraan dilaksanakan (Wilkinson dan Allen,

1999). Graf pada Rajah 7 telah membuktikan bahawa penyelesaian masalah secara berjujukan mempunyai peratus kecekapan 100% kerana sepanjang proses pengiraan dilaksanakan hanya satu pemproses sahaja yang terlibat dan pemproses itu akan digunakan sepenuhnya sepanjang pelaksanaan proses pengiraan tersebut.

7. KESIMPULAN

Hasil daripada kajian ini, dapat disimpulkan bahawa masa pelaksanaan akan menjadi semakin singkat dan peratus kecekapan akan berkurangan apabila bilangan pemproses meningkat. Sebaliknya, faktor kelajuan akan menjadi lebih baik apabila bilangan pemproses meningkat. Oleh yang demikian, kajian yang dilaksanakan ini telah membuktikan bahawa teori yang dikemukakan oleh Foster (1995) adalah benar. Secara keseluruhannya, penyelesaian masalah menggunakan kaedah GSMH dan PBBMH selari adalah lebih baik berbanding kaedah GSMH dan PBBMH berjujukan. Ini sekaligus membuktikan bahawa penyelesaian masalah secara selari adalah lebih baik berbanding secara berjujukan terutama dalam menyelesaikan masalah yang berskala besar (Chan dan Tuminaro, 1987; Michielse, 1995 dan Stals, 1993).

RUJUKAN

- Abdul Rahman Abdullah. 1990. *Pengiraan berangka*. Kuala Lumpur: Dewan Bahasa dan Pustaka.
- Chan, T. & Tuminaro, R. 1987. Design and implementation of parallel multigrid algorithms. *Proceedings of the Third Copper Mountain Conference on Multigrid Methods*, McCormick, S. F. (ed). Marcel Dekker: New York. 101-115.
- Evans, D. J. dan Abdullah, A. R. 1985. A new explicit method for the diffusion-convection equation. *Comp. & Maths And Appls*. 11(1-3): 145-154.
- Foster, I. T. 1995. Designing and building parallel programs: Concepts and tools for parallel software engineering. Massachusetts: Addison-Wesley.
- Michielse, P. H. 1995. Parallel multigrid using PVM. *Applied Numerical Mathematics*, 19: 63-69.
- Modi, J. J. 1988. *Parallel algorithms and matrix computation*. Oxford: Clarendon Press.
- Smith, G. D. 1978. Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods. Ed. ke-2. Oxford: Clarendon Press.
- Stals, L. 1993. Parallel implementations of multigrid methods. *Proceedings of the Sixth Biennial Conference on Computational Techniques and Applications*, Stewart, D., ed. Canberra, Australia: 437-443.
- Wilkinson, B. dan Allen, M. 1999. *Parallel programming: techniques and applications using networked workstations and parallel computers*. New Jersey: Prentice Hall.