

PENGIMPLEMENTASIAN KAEDAH MULTIGRID TERHADAP EMPAT KAEDAH LELARAN TERPILIH BAGI MENYELESAIKAN PERSAMAAN RESAPAN OLAKAN SATU DIMENSI

Lizawati Mi Yusuf¹, Abdul Rahman Abdullah² dan Mohd Shahizan Othman¹

¹ Fakulti Sains Komputer & Sistem Maklumat, Universiti Teknologi Malaysia,
81310 Skudai, Johor Bahru, Johor

Email: lizawati@fsksm.utm.my / shahizan@fsksm.utm.my

² Fakulti Teknologi & Sains Maklumat, Universiti Kebangsaan Malaysia,
43600 Bangi, Selangor

Email: ara@ftsm.ukm.my

Abstrak:

Kaedah multigrid merupakan satu daripada kaedah lelaran yang berkesan dalam menyelesaikan sesuatu masalah persamaan linear yang kompleks dan bersaiz besar. Kaedah multigrid ini melibatkan tiga proses yang utama iaitu proses pelicinan, interpolasi dan sekatan. Dalam kajian ini, kaedah lelaran Gauss-Seidel, Gauss-Seidel Merah Hitam (GSMH), Jacobi dan Pengenduran Berlebihan Berturut-turut (PBB) telah digunakan sebagai pelicin dalam menyelesaikan masalah persamaan resapan-olakan satu dimensi. Hasil daripada kajian membuktikan bahawa penyelesaian menggunakan kaedah multigrid adalah lebih baik berbanding kaedah tanpa multigrid.

Katakunci: Kaedah multigrid, Gauss-Seidel, Gauss-Seidel Merah Hitam, Jacobi, Pengenduran Berlebihan Berturut-turut, Persamaan Resapan-Olakan

Abstract:

Multigrid method is one of the effective methods to solve complex and large size of linear equation problem. Multigrid methods have three processes, such as smoothing process, interpolation and restriction. In this research, Gauss-Seidel, Gauss-Seidel Red Black (GSRB), Jacobi and Successive Over Relaxation (SOR) methods are used as smoother to solve one dimensional convection-diffusion equation. As a result, the research shows that solving with multigrid method is better than non multigrid method.

Keywords : Multigrid method, Gauss-Seidel, Gauss-Seidel Red Black, Jacobi, Successive Over Relaxation, Convection-Diffusion Equation

1.0 Pengenalan

Penyelesaian berangka bagi masalah sistem persamaan linear boleh diperolehi melalui kaedah terus atau lelaran. Kaedah lelaran biasanya digunakan untuk menyelesaikan masalah sistem persamaan linear yang bersaiz besar dan kompleks. Ia juga digunakan untuk menjimatkan ruang storan dan mendapatkan penyelesaian yang lebih cepat berbanding kaedah terus (Hager, 1988). Kaedah multigrid (MTG) merupakan satu daripada kaedah lelaran yang telah terbukti berkesan dalam menyelesaikan persamaan terbitan separa secara berjjukan apabila ia digunakan bersama-sama dengan kaedah-kaedah lelaran yang lain seperti kaedah Gauss-Seidel, Jacobi berpemberat dan min aritmetik (Norma, 1997 dan Jumat, 1998). Kajian ini dilaksanakan untuk melihat sejauh manakah keberkesanan kaedah MTG kitaran V dalam menyelesaikan persamaan resapan-olakan satu dimensi dengan menggunakan kaedah Gauss-Seidel, GSMH, Jacobi dan PBB sebagai pelicin.

2.0 Perumusan Molekul Pengiraan Berdasarkan Kaedah Lelaran

Kajian ini telah menyelesaikan persamaan satu dimensi bagi resapan-olakan yang melibatkan masa, t . Berikut adalah persamaannya:

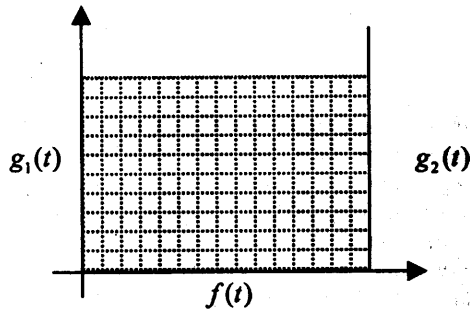
$$\frac{\partial u}{\partial t} - v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + w \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (2.1)$$

dengan v dan w adalah parameter pekali bagi resapan dan olakan, dan

$$\left. \begin{array}{l} \text{syarat sempadan (SS): } u(0,t) = g_1(t) \\ u(1,t) = g_2(t) \end{array} \right\} 0 < t < \infty,$$

$$\text{syarat awal (SA): } u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Domain penyelesaian bagi persamaan resapan-olakan satu dimensi adalah seperti Rajah 1.



Rajah 1: Resapan-olakan satu dimensi

Dalam kajian ini, persamaan terbitan separa bagi persamaan (2.1) akan diwakili oleh persamaan penghampiran beza terhingga dengan menggunakan kaedah tersirat iaitu kaedah Crank-Nicolson. Kaedah tersirat adalah kaedah yang lebih baik berbanding kaedah tak tersirat kerana ia membenarkan saiz grid yang lebih besar dipilih; jadi ia dapat mengurangkan ralat pembundaran (Farlow, 1989). Penghampiran beza terhingga bagi sesuatu persamaan terbitan separa boleh diperolehi melalui kembangan siri Taylor. Untuk kemudahan, tatatanda berikut telah digunakan:

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \dots$$

$$u(x,t) = u_{i,j}, \quad u(x,t+k) = u_{i,j+1}, \quad u(x+h,t) = u_{i+1,j}, \quad \dots$$

Dalam melaksanakan penghampiran beza terhingga bagi sesuatu persamaan terbitan separa, kaedah Crank-Nicolson menyatakan bahawa nilai bagi u_x dan u_{xx} perlu digantikan dengan purata penghampiran beza memusat pada nilai masa t dan $t+k$ (Farlow, 1989 dan Smith, 1978). Oleh itu, jika kita menggantikan terbitan separa u_t , u_x dan u_{xx} bagi persamaan (2.1) dengan penghampiran berikut:

$$u_t|_{i,j} = \frac{1}{k} [u_{i,j+1} - u_{i,j}], \quad (2.2)$$

$$u_x|_{i,j} = \frac{1}{2} \left[\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1}}{2h} + \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} \right], \quad (2.3)$$

$$u_{xx}|_{i,j} = \frac{1}{2} \left[\frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \right], \quad (2.4)$$

maka, persamaan beza terhingga bagi persamaan (2.1) adalah:

$$\frac{1}{k} [u_{i,j+1} - u_{i,j}] - \frac{v}{2h^2} \left[\frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{2} + \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{2} \right] + \frac{w}{4h} [u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j} - u_{i-1,j}] = 0. \quad (2.5)$$

Kemudian, jika persamaan (2.5) diolah semula dengan meletakkan $u_{i,j}$ bagi subskrip masa, j paling besar pada sebelah kiri persamaan, maka,

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{v}{2h^2} + \frac{w}{4h}\right)u_{i-1,j+1} + \left(\frac{1}{k} + \frac{v}{h^2}\right)u_{i,j+1} - \left(\frac{v}{2h^2} - \frac{w}{4h}\right)u_{i+1,j+1} = \\ & \left(\frac{v}{2h^2} + \frac{w}{4h}\right)u_{i-1,j} + \left(\frac{1}{k} - \frac{v}{h^2}\right)u_{i,j} + \left(\frac{v}{2h^2} - \frac{w}{4h}\right)u_{i+1,j}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

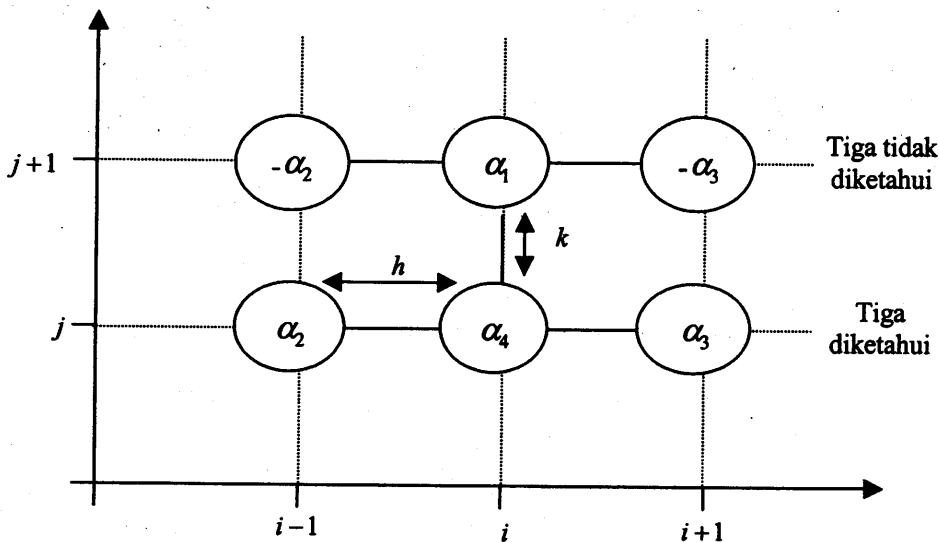
Jika,

$$\alpha_1 = \left(\frac{1}{k} + \frac{v}{h^2}\right), \quad \alpha_2 = \left(\frac{v}{2h^2} + \frac{w}{4h}\right), \quad \alpha_3 = \left(\frac{v}{2h^2} - \frac{w}{4h}\right), \quad \alpha_4 = \left(\frac{1}{k} - \frac{v}{h^2}\right),$$

maka, persamaan (2.6) boleh diringkaskan menjadi

$$\begin{aligned} & -\alpha_2 u_{i-1,j+1} + \alpha_1 u_{i,j+1} - \alpha_3 u_{i+1,j+1} = \alpha_2 u_{i-1,j} + \alpha_4 u_{i,j} + \alpha_3 u_{i+1,j} \\ & \therefore -\alpha_2 u_{i-1,j+1} + \alpha_1 u_{i,j+1} - \alpha_3 u_{i+1,j+1} = f_{i,j}^a \end{aligned} \quad (2.7)$$

Oleh itu, molekul pengiraan yang terlibat untuk persamaan (2.7) berdasarkan skema kaedah tersirat Crank-Nicolson (Smith, 1978) adalah seperti pada Rajah 2.



Rajah 2: Molekul pengiraan

Daripada persamaan (2.7), satu sistem persamaan linear dapat dijanakan iaitu sistem persamaan linear tiga pepenjuar dan diberikan oleh persamaan berikut:

$$A_{\alpha} u_{-j+1} = f_{-j}^a. \quad (2.8)$$

Persamaan (2.8) ini, boleh diwakili dalam bentuk matriks berikut:

$$\begin{bmatrix}
 \alpha_1 & -\alpha_3 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
 -\alpha_2 & \alpha_1 & -\alpha_3 & 0 & & & & 0 \\
 0 & -\alpha_2 & \alpha_1 & -\alpha_3 & & & & \vdots \\
 \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\
 \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
 \vdots & & & & -\alpha_2 & \alpha_1 & -\alpha_3 & 0 \\
 \vdots & & & & 0 & -\alpha_2 & \alpha_1 & -\alpha_3 \\
 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & -\alpha_2 & \alpha_1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_{1,j+1} \\
 u_{2,j+1} \\
 u_{3,j+1} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 u_{m,j+1}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \alpha_2 u_{0,j+1} + f_{1,j}^\alpha \\
 f_{2,j}^\alpha \\
 f_{3,j}^\alpha \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \alpha_3 u_{m+1,j+1} + f_{m,j}^\alpha
 \end{bmatrix}
 \quad (2.9)$$

2.1 Kaedah Jacobi

Kaedah ini akan menggunakan nilai-nilai u_i pada lelaran ke- k untuk mengira nilai u_i pada lelaran ke- $(k+1)$. Bentuk am persamaan kaedah Jacobi bagi sistem persamaan linear (2.9) adalah

$$u_i^{(k+1)} = \frac{f_i + \alpha_2 u_{i-1}^k + \alpha_3 u_{i+1}^k}{\alpha_1} \quad (2.10)$$

2.2 Kaedah Gauss-Seidel

Kaedah ini sentiasa menggunakan nilai terkini untuk mengira nilai u_i pada lelaran ke- $(k+1)$. Kaedah ini mempunyai kadar penumpuan yang tinggi berbanding kaedah Jacobi kerana nilai terkini yang digunakan dalam setiap lelaran akan mengakibatkan bilangan lelaran yang diperlukan untuk menumpu adalah sedikit (Modi, 1988 dan Wilkinson et. al., 1999). Selain itu, kaedah Gauss-Seidel dapat menjimatkan ruang storan kerana ia hanya memerlukan satu tatasusunan untuk menyimpan nilai u_i pada lelaran ke- k dan ke- $(k+1)$ (Abdul Rahman, 1990). Bentuk am persamaan kaedah Gauss-Seidel bagi sistem persamaan linear (2.9) adalah

$$u_i^{(k+1)} = \frac{f_i + \alpha_2 u_{i-1}^{(k+1)} + \alpha_3 u_{i+1}^k}{\alpha_1} \quad (2.11)$$

2.3 Kaedah Pengenduran Berlebihan Berturut-turut (PBB)

Kaedah ini akan menggunakan nilai $\hat{u}_i^{(k+1)}$ yang diperolehi melalui kaedah Gauss-Seidel bagi mengira nilai $u_i^{(k+1)}$ dengan mengambil purata berpemberat di antara nilai $\hat{u}_i^{(k+1)}$ dan u_i^k . Bentuk am persamaan PBB untuk sistem persamaan linear (2.9) adalah :

$$u_i^{(k+1)} = \omega \hat{u}_i^{(k+1)} + (1-\omega)u_i^k \quad (2.12)$$

Nilai pemberat, ω adalah suatu parameter yang tidak bergantung kepada nilai i dan k . Nilai ω yang paling sesuai adalah dalam julat 0 hingga 2 (Smith, 1978 dan Abdul Rahman, 1990). Pemilihan nilai ω yang optima akan menyebabkan suatu nilai penghampiran yang lebih baik mungkin akan diperolehi dan sekaligus ia akan mempercepatkan kadar penumpuan.

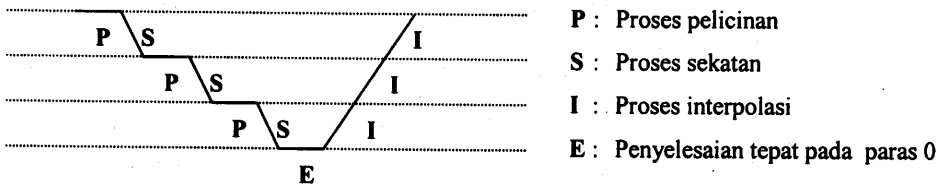
2.4 Kaedah Gauss-Seidel Merah Hitam (GSMH)

Kaedah ini sama seperti kaedah Gauss-Seidel. Oleh kerana, dalam kaedah Gauss-Seidel susunan pengemaskinian nilai-nilai adalah secara berjujukan, maka ciri ini adalah tidak bersesuaian untuk digunakan dalam persekitaran kerja selari (Wilkinson et. al., 1999). Walaupun begitu, susunan tersebut boleh diubah suai untuk menjadikannya lebih relevan dengan persekitaran kerja selari iaitu dengan menggunakan susunan merah hitam. Dalam susunan merah hitam, titik-titik akan dibahagikan kepada titik-titik merah dan titik-titik hitam di mana proses pengiraan titik-titik

tersebut akan melibatkan dua fasa. Fasa pertama, titik-titik hitam akan dikira. Fasa kedua, titik-titik merah pula akan dikira. Proses pengiraan ini akan diulang sehingga nilai-nilai bagi titik merah dan hitam menumpu.

3.0 Kaedah Multigrid (MTG)

Kaedah MTG merupakan satu kaedah yang pantas dan berkesan bagi menyelesaikan masalah persamaan kamiran dan terbitan separa dalam kebanyakan bidang pengkomputeran saintifik seperti dinamik bendalir dan mekanik berstruktur. Ia beroperasi pada jujukan grid hirarki yang berlainan saiz. Kaedah MTG dapat mengatasi masalah yang dihadapi oleh kebanyakan kaedah lelaran iaitu untuk menghapuskan komponen-komponen bagi ralat berfrekuensi rendah yang mengakibatkan kadar penumpuan menjadi perlahan selepas beberapa lelaran melalui pelaksanaan operasi pelicinan, sekatan dan interpolasi (Hackbusch, 1985 dan Norma, 1997).



Rajah 3: Struktur pelaksanaan kaedah multigrid kitaran V

Dalam kajian ini, kaedah MTG kitaran V telah digunakan kerana ia lebih mudah untuk difahami dan dilaksanakan. Struktur pelaksanaan kaedah MTG kitaran V adalah seperti dalam Rajah 3 (Hackbusch, 1985). Proses dalam kaedah MTG kitaran V bermula apabila grid halus bagi sistem persamaan linear $Au = f$ melaksanakan beberapa lelaran dengan menggunakan kaedah lelaran seperti Gauss-Seidel dan Jacobi sebagai pelicinnya (Hackbusch, 1985, Wesseling 1992, Norma 1997, Jumat, 1998 dan Briggs et. al., 2000). Proses pelicinan akan menghapuskan ralat yang berfrekuensi tinggi. Hasil yang akan diperolehi daripada proses pelicinan ini adalah nilai anggaran v bagi nilai tepat u . Jika ralat yang berfrekuensi tinggi pula secara relatifnya telah menjadi kecil, maka $e = v - u$ akan menjadi ralat bagi v pada grid kasar (ralat yang berfrekuensi rendah). Proses ini dikenali sebagai proses sekatan. Pengiraan e perlu menggunakan grid kasar selagi ralat berfrekuensi rendah memenuhi nilai toleransi yang ditetapkan. Hasilnya, penambahan nilai di antara e dan v akan memberikan nilai anggaran yang lebih baik bagi u . Seterusnya, proses interpolasi akan dilaksanakan di mana grid halus akan digunakan semula dan nilai anggaran terakhir bagi u akan digunakan sebagai nilai awal bagi v . Setiap paras pada kitaran V akan mempunyai jujukan grid yang berbeza saiznya. Algoritma MTG kitaran V dinyatakan sebagai :

```

procedure MTG ( $f^h, u^h, h$ )
  if ( $h ==$  grid paling kasar) then  $u \leftarrow A^{-1}f^h$ 
  else
     $u \leftarrow P(f, u, h)$  /* P : proses pelicinan */
     $r \leftarrow f - Au$ 
     $\bar{r} \leftarrow Sr$  /* S : proses sekatan */
     $v \leftarrow 0$ 
     $v \leftarrow$  MTG ( $\bar{r}, v, 2h$ )
     $u \leftarrow u + Iv$  /* I : proses interpolasi */
  end if
  
```

4.0 Ujikaji Berangka

Ujikaji berangka yang dilaksanakan terhadap persamaan resapan-olakan satu dimensi pada masa, *t* telah melibatkan persamaan, syarat sempadan (SS) dan syarat awal (SA) seperti berikut (Evans & Abdullah, 1985):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + w \frac{\partial u}{\partial x} = 0 ,$$

di mana $\nu = 1.0$ dan $w = 1.0$ adalah parameter pekali bagi resapan dan olakan.

Syarat sempadan (SS):
$$\left. \begin{aligned} u(0,t) &= 0 \\ u(1,t) &= 1 \end{aligned} \right\} 0 < t < \infty ,$$

Syarat awal (SA):
$$u(x,0) = 0 , \quad 0 \leq x \leq 1 .$$

Penyelesaian tepat untuk persamaan (2.1) adalah

$$u(x,t) = \frac{e^{wx/\nu} - 1}{e^{w/\nu} - 1} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p p\pi}{(p\pi)^2 + \left(\frac{w}{2\nu}\right)^2} e^{w(x-1)/2\nu} \sin(p\pi x) e^{-((p\pi)^2 \nu + w^2/4\nu)t} \tag{4.1}$$

Semua keputusan ujikaji berangka yang diperolehi daripada kajian ini ditunjukkan dalam Jadual 1 dan 2. Manakala, ujian penumpuan pula menggunakan nilai toleransi, $\epsilon = 10^{-10}$

5.0 Kesimpulan

Berdasarkan kepada Jadual 1 dan 2, didapati bahawa penyelesaian persamaan resapan-olakan satu dimensi bagi kaedah Gauss-Seidel, GSMH, Jacobi dan PBB dengan kaedah MTG kitaran V adalah lebih baik dan berkesan berbanding kaedah tanpa MTG. Faktor utama pengurangan bilangan lalaran dan masa perlaksanaan ini adalah disebabkan oleh kelebihan yang terdapat pada kaedah MTG iaitu ia dapat menghapuskan ralat yang berfrekuensi rendah. Hasilnya, penyelesaian bagi kaedah lalaran dengan MTG dapat menumpu dengan lebih cepat. Secara keseluruhannya, penyelesaian bagi kaedah Gauss-Seidel dengan kaedah MTG adalah lebih baik berbanding kaedah GSMH, Jacobi dan PBB. Keberkesanan penyelesaian bagi kaedah PBB dengan MTG bergantung kepada ketepatan pemilihan nilai pemberatnya, ω . Manakala bagi kaedah GSMH, keberkesanannya tidak dapat dilihat dengan jelas dalam penyelesaian bagi kaedahya dengan kaedah MTG secara berjujukan. Ini kerana kaedah GSMH dicipta lebih kepada untuk menyelesaikan permasalahan dalam persekitaran selari berbanding secara berjujukan.

Jadual 1: Perbandingan bilangan lalaran

Kaedah Lalaran	Bilangan selang, m					
	64		128		256	
	TG	MTG	TG	MTG	TG	MTG
Gauss-Seidel	211	11	757	13	2778	38
PBB	201	12	722	13	2650	36
GSMH	206	10	752	13	2772	44
Jacobi	397	15	1450	18	5333	51

Jadual 2: Perbandingan masa perlaksanaan (dalam unit saat)

Kaedah Lalaran	Bilangan selang, m					
	64		128		256	
	TG	MTG	TG	MTG	TG	MTG
Gauss-Seidel	2.53	0.50	17.46	1.15	128.42	6.43
PBB	2.42	0.60	17.47	1.15	128.69	6.26
GSMH	2.85	0.55	26.03	1.32	148.95	8.45
Jacobi	4.28	0.60	30.43	1.37	223.10	7.47

Petunjuk:

TG: Tanpa kaedah multigrid

MTG: Dengan kaedah multigrid

GSMH: Kaedah Gauss-Seidel merah hitam

PBB: Kaedah pengenduran berlebihan berturut-turut

Rujukan

- Abdul Rahman Abdullah. 1990. *Pengiraan berangka*. Kuala Lumpur: Dewan Bahasa dan Pustaka.
- Ames, W. F. 1977. *Numerical methods for partial differential equations*. Ed. ke-2. New York: Academic Press.
- Atkinson, L. V. & Harley, P. J. 1983. *An introduction to numerical methods with Pascal*. England: Addison-Wesley.
- Briggs, W. L., Henson, V. E. & McCormick, S. F. 2000. *A multigrid tutorial*. Ed. ke-2. United States: SIAM.
- Evans, D. J. & Abdullah, A. R. 1985. A new explicit method for the diffusion-convection equation. *Comp. & Maths And Appls*. 11(1-3): 145-154.
- Farlow, S. J. 1989. *Persamaan terbitan separa untuk ahli sains dan jurutera*. Terj. Koh Hock Lye, Dr. Kuala Lumpur: Dewan Bahasa dan Pustaka.
- Forsythe, G. E. & Wasow, W. R. 1960. *Finite-difference methods for partial differential equations*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Hager, W. W. 1988. *Applied numerical linear algebra*. London: Prentice Hall.
- Jumat Sulaiman. 1998. Kajian pelaksanaan kaedah multigrid bagi persamaan Poisson dan resapan-olakan. Tesis Sar. Universiti Kebangsaan Malaysia.
- Modi, J. J. 1988. *Parallel algorithms and matrix computation*. Oxford: Clarendon Press.
- Norma Alias. 1997. Tatabara multigrid ke atas kaedah tak tersirat penghuraian berselang-seli secara lelaran dan kaedah min aritmetik. Tesis Sar. Universiti Kebangsaan Malaysia.
- Smith, G. D. 1978. *Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods*. Ed. ke-2. Oxford: Clarendon Press.
- Wesseling, P. 1992. *An introduction to multigrid methods*. Chichester: John Wiley & Sons.
- Wilkinson, B. & Allen, M. 1999. *Parallel programming: techniques and applications using networked workstations and parallel computers*. New Jersey: Prentice Hall.
- Young, D. M. 1971. *Iterative solution of large linear systems*. New York: Academic Press.