

Analog- q bagi Transformasi Linear terhadap Polinomial R_n

oleh

Ali Hassan Mohamed Murid
Jabatan Matematik
Fakulti Sains
Universiti Teknologi Malaysia
Karung Berkunci 791
80990 Johor Bahru, Johor

Abstrak:

Dalam kertas ini, analog- q yang kedua untuk polinomial R_n dalam dua pembolehubah diperkenalkan. Analog- q kedua ini didapati setara dengan analog- q pertama bagi R_n yang telah dibincangkan dalam satu kertas kerja yang lepas. Kasus khas daripada hubungan kesetaraan ini ialah transformasi linear terhadap polinomial R_n .

Abstract:

In this paper, a second q -analogue for the R_n polynomial in two variables is given. This second q -analogue is found to be equivalent with the first q -analogue of R_n discussed in a previous work. A special case of this equivalence relation is the linear transformation of the R_n polynomial.

1. Pengenalan

Polinomial $R_n(b, b'; x, y)$ ialah suatu polinomial hipergeometri yang ditakrifkan sebagai (lihat Carlson[2], hal.130)

$$R_n(b, b'; x, y) = \frac{n!}{(c, n)} \sum_{m=0}^n \frac{(b, m) (b', n-m)}{m! (n-m)!} x^m y^{n-m}, \quad (1.1)$$

dengan $n \in \mathbb{N}$, $b, b', x, y \in \mathbb{C}$, $c = b + b'$ dan $(c, n) \neq 0$. Ungkapan (a, m) ialah simbol Appell yang diberi takrif

$$(a, m) = a(a+1)(a+2)\dots(a+m-1), \quad (a, 0) = 1. \quad (1.2)$$

Polinomial R_n ini boleh ditulis dalam sebutan polinomial hipergeometri ${}_2F_1$ dalam berbagai cara. Satu daripadanya ialah (lihat Carlson[2], hal.179)

$$R_n(b, b'; x, y) = \frac{(b', n)}{(c, n)} y^n {}_2F_1(-n, b; 1 - b' - n; \frac{x}{y}). \quad (1.3)$$

Dalam [1], satu analog- q bagi polinomial $R_n(b, b'; x, y)$ telah diberikan. Analog- q tersebut yang ditandakan dengan $R_n(b, b'; q, x, y)$, atau ringkasnya $R_n(q)$, ditakrifkan sebagai

$$R_n(b, b'; q, x, y) = \frac{(q; q)_n}{(d; q)_n} \sum_{m=0}^n \frac{(b; q)_m (b'; q)_{n-m}}{(q; q)_m (q; q)_{n-m}} x^m y^{n-m}, \quad (1.4)$$

dengan $d = bb'$ dan $(a; q)_n = a(1-aq)(1-aq^2)\dots(1-aq^{n-1})$, $(a, q)_0 = 1$. Dalam [1], beberapa perkara berikut, yang penting dalam kertas ini, telah dibuktikan :

$$\lim_{q \rightarrow 1} R_n(q^b, q^{b'}; q, x, y) = R_n(b, b'; x, y) \quad (1.5)$$

$$R_n(b, b'; q, x, y) = R_n(b', b; q, y, x) \quad (1.6)$$

$$R_n(b, b'; q, \lambda x, \lambda y) = \lambda^n R_n(b, b'; q, x, y) \quad (1.7)$$

$$R_n(b, b'; q, x, y) = y^n \frac{(b'; q)_n}{(d; q)_n} {}_2\phi_1(q^{-n}, b; q^{1-n}/b'; q, (qx)/(b'y)) \quad (1.8)$$

Fungsi ${}_2\phi_1$ dalam (1.8) ialah analog-q bagi fungsi hipergeometri ${}_2F_1$ (lihat Slater[5], Bab 3). Persamaan (1.8) juga setara dengan

$${}_2\phi_1(q^{-n}, \beta; \gamma; q, \zeta) = \frac{(\gamma/\beta; q)_n \beta^n}{(\gamma; q)_n} R_n(\beta, q^{1-n}/\gamma; q, \gamma^{-1}q^{-n}\zeta, 1). \quad (1.9)$$

Dalam kertas ini kita akan cuba dapatkan analog-q bagi transformasi linear terhadap $R_n(b, b'; x, y)$, iaitu (lihat Carlson[2], hal.141)

$$(c, n)R_n(b, b'; x, y) = (b, n)R_n(b', 1-c-n; x-y, x) \quad (1.10)$$

$$= (b', n)R_n(b, 1-c-n; y-x, y), \quad (1.11)$$

dengan $n \in \mathbb{N}$, $b, b', x, y \in \mathbb{C}$, $c = b + b'$. Dalam usaha ini, satu lagi analog-q bagi (1.1) terpaksa diperkenalkan. Analog-q kedua ini kita tandakan sebagai $R_n^*(b, b'; q, x, y)$ atau ringkasnya $R_n^*(q)$. Permasalahan dan takrifan $R_n^*(q)$ akan diberi dalam seksyen 3. Bagaimanapun $R_n(q)$ dan $R_n^*(q)$ adalah setara. Daripada kesetaraan inilah transformasi (1.10) dan (1.11) muncul sebagai kasus khas. Kesemua ini akan dibuktikan dalam seksyen 4.

2. Penyusunan siri dan rumus berkaitan dengan $(a; q)_n$

Satu rumus yang akan digunakan dalam kerja kita nanti ialah penyusunan semula sebutan dalam siri. Satu jenis yang akan diperlukan ialah

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m B(k, m) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m B(k, m+k). \quad (2.1)$$

Untuk pembuktiannya, sila lihat Rainville[4], hal.57.

Rumus yang berkaitan dengan $(a; q)_n$ juga kerap kali digunakan dalam penulisan semula siri-q. Kesemua fakta berikut ada dibuktikan dalam Slater[5], Bab 3, yang mana pembaca boleh merujuk untuk sebarang bahan yang tidak dilazimi:

$$(aq^{-n}; q)_n = (-a)^n q^{-n(n+1)/2} (q/a; q)_n \quad (2.2)$$

$$(a;q)_{-n} = \frac{(-a)^n q^{n(n+1)/2}}{(q/a;q)_n} \quad (2.3)$$

$$(a;q)_{m-n} = \frac{(a;q)_m q^{n(n+1)/2}}{(q^{1-m}/a;q)_n (-a)^n q^{mn}} \quad (2.4)$$

$${}_2\phi_1(q^{-n}, a; b; q, q) = \frac{a^n (b/a; q)_n}{(b; q)_n} \quad (2.5)$$

Persamaan terakhir ini juga dikenali sebagai analog-q teorem Vandermonde.

3. Analog-q yang kedua untuk polinomial R_n

Ungkapan (1.3) dalam bentuk siri ialah

$$R_n(b, b'; x, y) = y^n \frac{(b', n)}{(c, n)} \sum_{m=0}^n \frac{(-n, m) (b, m)}{(1-b'-n, m) m!} (x/y)^m. \quad (3.1)$$

Dengan menggunakan teorem binomial, sebutan $(x/y)^m$ kita tulis semula sebagai

$$(x/y)^m = (1 - (1 - (x/y)))^m = \sum_{k=0}^m \frac{(-m, k)}{k!} (1 - (x/y))^k = {}_1F_0(-m; 1 - (x/y)). \quad (3.2)$$

Menggantikan, kita peroleh

$$R_n(b, b'; x, y) = y^n \frac{(b', n)}{(c, n)} \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m \frac{(-m, k) (-n, m) (b, m)}{(1-b'-n, m) m! k!} (1 - (x/y))^k. \quad (3.3)$$

Seterusnya dengan menggunakan beberapa hubungan simbol Appell, (2.1) dan teorem Vandermonde, maka transformasi (1.10) dan (1.11) dapat dibuktikan.

Sekarang kita cuba guna jalan kerja di atas untuk $R_n(q)$ pula. Kita mulai dengan (1.8) dalam bentuk siri, iaitu

$$R_n(b, b'; q, x, y) = y^n \frac{(b'; q)_n}{(d; q)_n} \sum_{m=0}^n \frac{(q^{-n}; q)_m (b; q)_m}{(q^{1-n}/b'; q)_m (q; q)_m} ((qx)/(b'y))^m. \quad (3.4)$$

Jika kita tulis $((qx)/(b'y))^m = (1 - (1 - (qx)/(b'y)))^m$ dan guna teorem binomial, maka masalah yang timbul ialah terdapatnya campuran simbol Appell (a, n) dengan simbol $(a; q)_n$. Untuk usaha seterusnya kita pertimbangkan teorem binomial- q (lihat Slater[5], hal.92), iaitu

$$(1 - zq^{-m})(1 - zq^{1-m}) \dots (1 - zq^{-1}) = \sum_{k=0}^m \frac{(q^{-m}; q)_k}{(q; q)_k} z^k = {}_1\phi_0(q^{-m}; q, z) \quad (3.5)$$

atau, dengan menggantikan z dengan $(1-z)$, maka

$$(1 - (1-z)q^{-m})(1 - (1-z)q^{1-m}) \dots (1 - (1-z)q^{-1}) \\ = \sum_{k=0}^m \frac{(\bar{q}^m; q)_k}{(q; q)_k} (1-z)^k = {}_1\phi_0(q^{-m}; q, 1-z). \quad (3.6)$$

Perhatikan bahawa, jika $z=x/y$ dan diambil had $q \rightarrow 1$, maka (3.6) menjadi (3.2). Perhatikan juga bahawa dalam mendapatkan (3.3), kita telah gantikan $(x/y)^m$ dalam (3.1) dengan ${}_1F_0(-m; 1 - (x/y))$. Tetapi untuk analog- q , kita tidak boleh menggantikan $((qx)/(b'y))^m$ dalam (3.4) dengan

$${}_1\phi_0(q^{-m}; q, 1 - ((qx)/(b'y)))$$

kerana mereka tidak bersamaan.

Kegagalan usaha di atas ini membawa kesimpulan bahawa analog- q yang kedua bagi (1.1) perlu diperkenalkan. Kata-kata analog- q kedua ini kita beri tatatanda $R_n^*(b, b'; q, x, y)$ atau ringkasnya $R_n^*(q)$. Setelah beberapa percubaan, $R_n^*(q)$ yang sesuai dengan matlamat kita ialah

$$R_n^*(b, b'; q, x, y) = D \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m \frac{(b; q)_m (b'; q)_{n-m} (q^{-m}; q)_k}{(q; q)_m (q; q)_{n-m} (q; q)_k} w^k S^m T, \quad (3.7)$$

dengan $D = \frac{(q; q)_n}{(d; q)_n} y^n$, $w = (1 - (x/y))$, $S = b'/q$, dan $T = \frac{q^{(k+1)(m-k)}}{(bq^k)^{n-k}}$.

Sebagaimana $R_n(q)$, $R_n^*(q)$ juga bersifat homogen, yaitu

$$R_n^*(b, b'; q, \lambda x, \lambda y) = \lambda^n R_n^*(b, b'; q, x, y). \quad (3.8)$$

Jika digantikan b, b' dengan $q^b, q^{b'}$ dan ambil had $q \rightarrow 1$, maka boleh ditunjukkan bahawa

$$\lim_{q \rightarrow 1} R_n^*(q^b, q^{b'}; q, x, y) = R_n(b, b'; x, y). \quad (3.9)$$

Jadi $R_n^*(q)$ juga merupakan analog- q bagi R_n . Apa yang lebih menarik ialah $R_n^*(q)$ dan $R_n(q)$ adalah setara, iaitu setiap satu boleh ditulis dalam sebutan yang lain. Hal ini akan dibuktikan dalam seksyen berikutnya.

4. Kesetaraan antara $R_n^*(q)$ dan $R_n(q)$

Daripada persamaan (3.7), penggunaan hubungan (2.4) terhadap $(b'; q)_{n-m}$ dan $(q; q)_{n-m}$ menghasilkan

$$R_n^*(q) = E \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m \frac{(b; q)_m (q^{-n}; q)_m (q^{-m}; q)_k}{(q^{1-n}/b'; q)_m (q; q)_k (q; q)_m} w^k T, \quad (4.1)$$

dengan $E = y^n (b'; q)_n / (d; q)_n$. Penggunaan rumus (2.4) sekali lagi terhadap $(q; q)_{m-k}$, kita dapat

$$\frac{(q^{-m}; q)_k}{(q; q)_m} = \frac{(-1)^k}{(q; q)_{m-k}} q^{-k(1+2m-k)/2}. \quad (4.2)$$

Menggantikan, maka (4.1) menjadi

$$R_n^*(q) = E \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m \frac{(b; q)_m (q^{-n}; q)_m (-w)^k T}{(q^{1-n}/b'; q)_m (q; q)_k (q; q)_{m-k}} q^{-k(1+2m-k)/2}. \quad (4.3)$$

Memandangkan $(q^{-n}; q)_m = 0$ jika $m > n$, maka penghasil tambah $\sum_{m=0}^n$ di atas boleh digantikan dengan $\sum_{m=0}^n$. Seterusnya dengan menggunakan rumus (2.1), persamaan (4.3) dapat ditulis semula dalam sebutan polinomial ${}_2\phi_1$, iaitu

$$R_n^*(q) = E \sum_{k=0}^n \frac{(b; q)_k (q^{-n}; q)_k (-w)^k q^{-k(k+1)/2}}{(q^{1-n}/b'; q)_k (q; q)_k (bq^k)_{n-k}} {}_2\phi_1(q), \quad (4.4)$$

dengan

$${}_2\phi_1(q) = {}_2\phi_1(q^{-n+k}, bq^k; q^{1-n+k}/b'; q, q). \quad (4.5)$$

Dengan menggunakan analog-q teorem Vandermonde (2.5), maka boleh ditunjukkan bahawa

$${}_2\phi_1(q) = \frac{(q^{1-n}/d; q)_{n-k} (bq^k)_{n-k}}{(q^{1-n+k}/b'; q)_{n-k}}. \quad (4.6)$$

Penggunaan rumus-rumus (2.2), (2.3) dan (2.4), membolehkan (4.6) ditulis semula sebagai

$${}_2\phi_1(q) = \frac{(-dq^k)^k (d; q)_n (q^{1-n}/b'; q)_k}{(d; q)_k (b'; q)_n b^n q^{k(k+1)/2}}. \quad (4.7)$$

Penggantian ini ke dalam (4.4), menghasilkan

$$R_n^*(q) = Y^n b^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{(b; q)_k (q^{-n}; q)_k}{(d; q)_k (q; q)_k} (dw/q)^k \quad (4.8)$$

$$= Y^n b^{-n} {}_2\phi_1(q^{-n}, b; d; dw/q) \quad (4.9)$$

$$= Y^n \frac{(b'; q)_n}{(d; q)_n} R_n(b, q^{1-n}/d; q, wq^{1-n}, 1), \quad (4.10)$$

atau

$$R_n^*(b, b'; q, x, Y) = \frac{(b'; q)_n}{(d; q)_n} R_n(b, q^{1-n}/d; q, (Y-x)q^{1-n}, Y). \quad (4.11)$$

Persamaan (4.10) diperolehi dari penggunaan rumus (1.9), manakala

(4.11) didapati dari penggunaan rumus (1.7) dan mengambil kira $w=1-(x/y)$. Jika b, b' digantikan dengan $q^b, q^{b'}$ dan ambil had $q \rightarrow 1$, maka (4.9) menjadi

$$R_n(b, b'; x, y) = y^n {}_2F_1(-n, b; c; 1-(x/y)), \quad c=b+b'. \quad (4.12)$$

Persamaan ini juga terdapat dalam Carlson[2], hal.179. Oleh yang demikian, persamaan (4.9) merupakan analog- q bagi (4.12).

Dalam persamaan (4.11), jika kita gantikan $(y-x)q^{-1-n}$ dengan x dan q^{1-n}/d dengan b' , dan juga guna hubungan (2.3) serta (1.6), maka persamaan (4.11) didapati setara dengan

$$(d; q)_n R_n(b, b'; q, x, y) = b^n (b'; q)_n R_n^*(b, q^{1-n}/d; q, y-q^{1-n}x, y) \quad (4.13)$$

$$= (b')^n (b; q)_n R_n^*(b', q^{1-n}/d; q, x-q^{1-n}y, x). \quad (4.14)$$

Hubungan (4.11), (4.13) dan (4.14) menunjukkan $R_n^*(q)$ dan $R_n(q)$ adalah setara. Hubungan (4.13) dan (4.14) juga sebenarnya ialah analog- q bagi transformasi linear (1.10) dan (1.11). Ini boleh dibuktikan dengan menggantikan b, b' dengan $q^b, q^{b'}$ dan ambil had $q \rightarrow 1$.

5. Kesimpulan

Dalam kertas ini kita telah memperkenalkan analog- q yang kedua bagi $R_n(b, b'; x, y)$ yang ditandakan sebagai $R_n^*(b, b'; q, x, y)$. $R_n^*(q)$ ini didapati setara dengan analog- q yang pertama iaitu $R_n(b, b'; q, x, y)$. Kasus khas daripada kesetaraan ini ialah transformasi linear untuk $R_n(b, b'; x, y)$. Dalam teori fungsi- q , adalah tidak aneh jika terdapat beberapa analog- q yang berlainan untuk fungsi yang sama. Perkara yang serupa telah diperlakukan oleh Jackson[3], di mana beliau telah mentakrifkan dua siri- q yang berlainan untuk ungkapan eksponen e^x .

Penghargaan : Penulis berterima kasih kepada pihak Perpustakaan UTM atas usaha untuk mendapatkan makalah [3].

Rujukan

- [1] Ali Hassan Mohd. Murid, Masalah Analog- q bagi Fungsi-R Carlson, Matematika 5(1989) 149-158.
- [2] B.C.Carlson, Special Functions of Applied Mathematics, Academic Press, New York, 1977.
- [3] F.H.Jackson, Transformation of q -Series, Mess. Math. 39(1910) 145-151.
- [4] E.D.Rainville, Special Functions, Chelsea Publishing Company, New York, 1960.
- [5] L.J.Slater, Generalized Hypergeometric Functions, Cambridge University Press, London, 1966.