Jurnal Teknologi, 41(C) Dis. 2004: 45–54

SUATU HUBUNGAN KUMPULAN PUSAT-2 DENGAN TEORI KEBARANGKALIAN

NOR HANIZA SARMIN[1] & HASIMAH SAPIRI[2]

Abstrak. Penentuan darjah keabelanan bagi suatu kumpulan tak abelan telah diperkenalkan untuk kumpulan simetri oleh Erdos dan Turan [1]. Dalam tahun 1973, Gustafson [2] mengkajinya bagi kumpulan terhingga sementara MacHale [3] mengkajinya bagi gelanggang terhingga dalam tahun 1976. Dalam kajian ini, beberapa keputusan yang berkaitan dengan $P_n(G)$, kebarangkalian bahawa suatu unsur rawak dengan kuasa ke-n dalam suatu kumpulan pusat-2 G adalah kalis tukar tertib dengan unsur rawak yang lain dalam kumpulan yang sama, akan diberikan. Seterusnya, batas atas bagi $P_2(G)$ diperoleh.

Kata kunci: Teori kebarangkalian, teori kumpulan, kumpulan terhingga, kalis tukar tertib

Abstract. The determination of the abelianness of a nonabelian group has been introduced for symmetric groups by Erdos & Turan [1]. In 1973, Gustafson [2] did this research for the finite groups while MacHale [3] determined the abelianness for finite rings in 1976. In this research, some results on $P_n(G)$, the probability that the n-th power of a random element in a 2-central group G commutes with another random element from the same group, will be presented. Furthermore, the upper limit of $P_2(G)$ is obtained.

Keywords: Probability theory, group theory, finite group, commutative

1.0 PENGENALAN

Teori kumpulan merupakan satu topik yang penting dalam aljabar niskala. Selain daripada penggunaannya dalam bidang matematik, terdapat pelbagai kegunaannya dalam bidang-bidang lain, antaranya bidang sains komputer, kimia dan fizik. Masalah dalam teori kumpulan terhingga telah menarik perhatian ramai ahli matematik tulen termasuklah mengenai perkaitan di antara teori kumpulan dengan teori kebarangkalian. Antara perkaitan yang dimaksudkan ialah darjah keabelanan bagi suatu kumpulan yang tak abelan.

Darjah keabelanan bagi suatu kumpulan G ditakrifkan sebagai kebarangkalian bahawa suatu pasangan unsur yang rawak dalam kumpulan tersebut adalah kalis tukar tertib. Dalam bentuk simbol, kebarangkalian tersebut ditulis sebagai:

[1] Jabatan Matematik, Fakulti Sains, Universiti Teknologi Malaysia, 81310 UTM Skudai, Johor, Malaysia. Email: nhs@mel2.fs.utm.my.
[2] Sekolah Sains Kuantitatif, Universiti Utara Malaysia, 06010 UUM Sintok, Kedah, Malaysia. Email: shiema78@yahoo.com.

$$P_1(G) = \frac{\left| \{(x, y) \in G \times G \mid xy = yx\} \right|}{|G|^2}.$$

Idea untuk mengira $P_1(G)$ telah diperkenalkan oleh Erdos dan Turan [1] yang telah mengkaji konsep ini untuk kumpulan simetri. Gustafson [2] dan MacHale [3] pula telah mengkaji konsep ini untuk kumpulan terhingga dan mendapati bahawa kebarangkaliannya tidak terlalu menghampiri 1 jika G adalah kumpulan tak abelan yang terhingga. Rusin [4] pula mengkaji konsep ini untuk kumpulan terhingga dengan kelas nilpoten dua. Sherman [5] dan MacHale [3] juga mengkaji sifat kekalisan tukar tertib ini untuk struktur aljabar yang lain termasuk gelanggang terhingga.

Bagi kumpulan terhingga yang tertentu, kebarangkalian ini boleh didapati dengan melihat Sifir Cayleynya dan menggunakan takrif $P_1(G)$ secara langsung. Cara yang kedua ialah dengan mengira bilangan kelas konjugat dalam kumpulan tersebut (lihat Teorem 2.1). Dengan kedua-dua cara ini, didapati bahawa $P_1(S_3) = \frac{1}{2}$ dan $\mathrm{P}_1(D_4) = \frac{5}{8}$, dengan S_3 ialah kumpulan simetri berperingkat 6 dan D_4 kumpulan dwihedron berperingkat 8. Setelah pelbagai kajian dilakukan ke atas kebarangkalian ini, ahli matematik bersependapat mengatakan $\mathrm{P}_1(G)$ tidak akan melebihi $\frac{5}{8}$. Nilai kebarangkalian yang paling tinggi yang dapat dicapai oleh sesuatu kumpulan adalah tepat-tepat $\frac{5}{8}$ [2].

Kajian selanjutnya dilakukan untuk mencari kebarangkalian bahawa suatu unsur rawak dengan kuasa ke-n adalah kalis tukar tertib dengan unsur rawak yang lain dalam G. Kebarangkalian tersebut ditakrifkan sebagai [2]:

$$P_n(G) = \frac{\left| \{(x, y) \in G \times G \mid x^n y = yx^n\} \right|}{|G|^2}.$$

Bagi suatu kumpulan terhingga, $\mathrm{P}_n(G) = 1$ jika dan hanya jika G adalah pusat-n, iaitu $[x^n, y] = 1$, bagi semua $x, y \in G$. Dalam kajian ini, kebarangkalian tersebut diaplikasikan kepada kumpulan pusat-2. Pelbagai ciri bagi kumpulan pusat-2 dan beberapa keputusan yang berkaitan dengan $\mathrm{P}_n(G)$ akan dipersembahkan dalam Seksyen 3. Seterusnya suatu batas atas diperoleh bagi $\mathrm{P}_2(G)$.

2.0 BEBERAPA KEPUTUSAN ASAS

Dalam seksyen ini, beberapa teorem penting yang diperlukan untuk menentukan darjah keabelanan bagi kumpulan pusat-2 dipersembahkan. Teorem 2.1 memberikan satu rumus untuk mengira kebarangkalian bahawa suatu pasangan unsur rawak

dalam suatu kumpulan adalah kalis tukar tertib. Teorem ini telah diperkenalkan oleh MacHale [3].

Teorem 2.1 **[4]** Katalah G suatu kumpulan terhingga dan k bilangan kelas konjugat dalam G. Maka $P_1(G) = {}^{k}/_{|G|}$.

Seterusnya, teorem berikut diperlukan dalam pembuktian bagi Teorem 3.2 dalam seksyen 3 nanti.

Teorem 2.2 **[5]** Katalah G bertindak ke atas set X. Maka bagi $x \in X, |O_x| = [G : G_x]$, dengan O_x ialah orbit bagi x.

3.0 DARJAH KEABELANAN BAGI KUMPULAN PUSAT-2

Objektif seksyen ini ialah untuk mengkaji beberapa ciri penting bagi $P_n(G)$, iaitu kebarangkalian bahawa kuasa ke-n bagi suatu unsur rawak di dalam suatu kumpulan adalah kalis tukar tertib dengan sebarang unsur rawak yang lain dalam kumpulan yang sama. Kebarangkalian tersebut akan ditumpukan kepada kumpulan pusat-2. Akhir sekali diperoleh satu batas atas bagi $P_2(G)$. Sebelum itu, diberikan beberapa takrif asas dan teorem yang berkaitan dengan kumpulan pusat-2.

Takrif 3.1 Suatu kumpulan G dikenali sebagai kumpulan pusat-2 jika subkumpulan penukar-tertib, G' terkandung dalam pusat kumpulan, $Z(G)$.

Dari takrif di atas, diketahui bahawa G adalah pusat-2 jika dan hanya jika $[x^2, y] = 1$ $\forall x, y \in G$. Di sini ditakrifkan komutator bagi x dan y, $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ dan tatatanda $[x, y, z]$ yang bermaksud $[x, [y, z]]$ akan digunakan dalam Teorem 3.1 dan seterusnya.

Seterusnya, takrif berikut diperlukan untuk pembuktian bagi Teorem 3.1.

Takrif 3.2 Katakan p adalah suatu nombor perdana. Suatu kumpulan–p abelan permulaan, G adalah suatu kumpulan abelan yang terhingga yang mana semua unsur dalam G berperingkat 1 atau p.

Berikut diberikan beberapa ciri bagi kumpulan pusat-2 yang dipersembahkan dalam bentuk teorem.

Teorem 3.1 Pernyataan berikut adalah setara:

(i) G adalah pusat-2, iaitu $[x^2, y] = \forall x, y \in G$.

(ii) $[x, y, y] = 1$ dan $[x, y]^2 = 1$ $\forall x, y \in G$.

(iii) G' adalah suatu subset bagi $Z(G)$ dan $(G')^2 = 1$.

(iv) $G/Z(G)$ adalah suatu kumpulan-2 abelan permulaan.

Bukti: Mula-mula, buktikan kesetaraan untuk (i) dan (ii). Diketahui

$$[x, y^2] = [x, y]^2[x, y, y]. \tag{1}$$

Katalah $[x, y, y] = 1$ dan $[x, y]^2 = 1$. Dengan itu, dari (1), diperoleh $[x, y^2] = 1$. Seterusnya, katakan $[x, y^2] = 1$ maka dari (1), diperoleh

$$1 = [x, y]^2[x, y, y]. \tag{2}$$

Gantikan y dengan xy dalam persamaan (2), didapati

$$1 = [x, xy]^2[x, xy, xy].$$

Dengan menggunakan pengembangan bagi penukar tertib, diperoleh

$$\begin{aligned}
1 &= [x, xy]^2[x, xy, xy] \\
1 &= [x, xy]\ [x, xy]\ [x, xy, xy] \\
1 &= x(xy)x^{-1}(xy)^{-1}\ x(xy)x^{-1}(xy)^{-1}\ x(xy)(xy)\ x^{-1}(xy)^{-1}(xy)^{-1} \\
1 &= xxy\ x^{-1}y^{-1}x^{-1}xxy\ x^{-1}y^{-1}x^{-1}\ x(xy)(xy)\ x^{-1}(xy)^{-1}(xy)^{-1} \\
1 &= xyx\ x^{-1}y^{-1}x^{-1}xxy\ x^{-1}y^{-1}x^{-1}\ x(xy)(xy)\ x^{-1}(xy)^{-1}(xy)^{-1} \\
1 &= xyy^{-1}xyx^{-1}y^{-1}x^{-1}\ x(xy)(xy)\ x^{-1}(xy)^{-1}(xy)^{-1} \\
1 &= xy\ x^{-1}y^{-1}\ xy\ x^{-1}y^{-1}\ x(xy)(xy)\ x^{-1}(xy)^{-1}(xy)^{-1} \\
1 &= [x, y]\ [x, y]\ [x, xy, xy] \\
1 &= [x, y]^2[x, xy, xy]\ .
\end{aligned} \tag{3}$$

Dari (3),

$$\begin{aligned}
1 &= [x, y]^2[x, xy, xy] \\
1 &= [x, y]^2\ x(xy)(xy)\ x^{-1}(xy)^{-1}(xy)^{-1} \\
1 &= [x, y]^2\ x(xy)(xy)\ x^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1} \\
1 &= [x, y]^2\ xxyxy\ x^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Seterusnya, darabkan persamaan (4) dengan yy^{-1} dan susun semula untuk mendapatkan

$$\begin{aligned}
1 &= [x, y]^2\ yy^{-1}xxyxy\ x^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1}\ yy^{-1} \\
1 &= [x, y]^2xyy\ x^{-1}y^{-1}y^{-1}yxyx\ x^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1} \\
1 &= [x, y]^2[x, y, y][x, y, x]^y\ .
\end{aligned}$$

Dari (2), diketahui bahawa $1 = [x, y]^2[x, y, y]$ maka

$$1 = [x, y, x]^y. \tag{5}$$

Dari persamaan (5), didapati bahawa

$$1 = yxyx\ x^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}.$$

Konjugatkan persamaan di atas untuk mendapatkan

$$1 = yy^{-1}xyx\ x^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}y$$
$$1 = xyx\ x^{-1}y^{-1}x^{-1}.$$

Persamaan di atas boleh disusun semula kerana ia bersifat kalis tukar tertib, maka diperoleh

$$1 = yxx\ y^{-1}x^{-1}x^{-1}.$$

Darabkan pula persamaan di atas dengan yy^{-1} dan didapati

$$1 = yy^{-1}yxxy^{-1}x^{-1}x^{-1}yy^{-1}$$
$$1 = yy^{-1}xyy^{-1}xx^{-1}x\ yy^{-1}$$
$$1 = yxy^{-1}\ yy^{-1}xyy^{-1}$$
$$1 = yxy^{-1}xyy^{-1}$$
$$1 = xyyx^{-1}y^{-1}y^{-1}$$
$$1 = [x, y, y]\ .$$

Oleh itu, dari persamaan (2), iaitu $1 = [x, y]^2[x, y, y]$, maka $[x, y]^2 = 1$ kerana $1 = [x, y, y]$. Oleh itu, $[x, y]^2 = 1$.

Persamaan (1) dikenali sebagai pusat-2 manakala persamaan (2) pula dikenali sebagai Engel-2. Daripada pembuktian (i) $\leftrightarrow$ (ii), dapat disimpulkan bahawa jika G adalah satu kumpulan pusat-2 maka G adalah Engel-2.

Seterusnya, kita akan buktikan pula kesetaraan persamaan (ii) dan (iii). Telah dibuktikan bahawa $[x, y]^2 = 1$. Gantikan x dengan $[x, y]$ dan y dengan z ke dalam persamaan ini, memberikan

$$[[x, y], z]^2 = 1$$
$$[xyx^{-1}y^{-1}, z]^2 = 1$$
$$[xyx^{-1}y^{-1}, z]\ [xyx^{-1}y^{-1}, z] = 1$$
$$xyx^{-1}y^{-1}z\ (xyx^{-1}y^{-1})^{-1}z^{-1}xyx^{-1}y^{-1}z\ (xyx^{-1}y^{-1})^{-1}z^{-1} = 1$$
$$xyx^{-1}y^{-1}zyxy^{-1}x^{-1}z^{-1}xyx^{-1}y^{-1}zyxy^{-1}x^{-1}z^{-1} = 1$$

$$xyx^{-1}y^{-1}zyy^{-1}xx^{-1}z^{-1}\ xyx^{-1}\ y^{-1}zyy^{-1}xx^{-1}z^{-1} = 1$$

$$xyx^{-1}y^{-1}zz^{-1}\ xyx^{-1}\ y^{-1}zz^{-1} = 1$$

$$xyzx^{-1}y^{-1}z^{-1}\ xyzx^{-1}y^{-1}z^{-1} = 1$$

$$[x, y, z]\ [x, y, z] = 1$$

$$[x, y, z]^2 = 1.$$

Seterusnya, $[x, y, z]^3 = 1$ dan $[x, y, z]^2 = 1$ mengimplikasikan $[[x, y], z] = 1$. Oleh itu $G' \subseteq Z(G)$, iaitu G adalah satu kumpulan nilpoten dengan kelas 2. Begitu juga, apabila $[x, y]^2 = 1$ maka ini mengimplikasikan

$$[x, y]\ [x, y] = 1$$
$$(xyx^{-1}y^{-1})(xyx^{-1}y^{-1}) = 1$$
$$(xyx^{-1}y^{-1})^2 = 1.$$

Ini memberikan $(G')^2 = 1$. Maka terbukti bahawa jika $[x, y]^2 = 1$ maka $G' \subseteq Z(G)$ dan $(G')^2 = 1$. Sebaliknya pula, jika $G' \subseteq Z(G)$ maka $[x, y, y] = 1$ dan jika $(G')^2 = 1$ maka $[x, y]^2 = 1$.

Akhir sekali, akan ditunjukkan hubungan kesetaraan (i) dan (iv). Andaikan G adalah suatu kumpulan pusat-2. Maka untuk setiap unsur x dalam G, diperoleh suatu koset kiri, iaitu $(x\mathrm{Z}(G))^2 = x^2\mathrm{Z}(G) = \mathrm{Z}(G)$. Oleh kerana x berperingkat 2 maka ini mengimplikasikan bahawa $G/\mathrm{Z}(G)$ adalah suatu kumpulan-2 abelan permulaan. Sebaliknya pula, untuk setiap unsur x dalam G, didapati bahawa $(x\mathrm{Z}(G))(x\mathrm{Z}(G)) = \mathrm{Z}(G)$ mengimplikasikan $x^2\mathrm{Z}(G)$ maka x^2 terkandung dalam $\mathrm{Z}(G)$. Oleh itu, G adalah suatu kumpulan pusat-2.

Seterusnya beberapa keputusan berikut akan digunakan dalam pembuktian bagi teorem-teorem seterusnya. Ditakrifkan $G^{[n]} = \{g^n | g \in G\}$.

Usulan 3.1 **[4]** Andaikan cl(x) mewakili set konjugat bagi unsur x dalam G. Jika x adalah kuasa ke-n bagi suatu unsur dalam G maka setiap unsur y dalam cl(x) juga adalah kuasa ke-n bagi suatu unsur dalam G.

Teorem 3.2 Andaikan G suatu kumpulan terhingga dan q_n adalah bilangan kelas konjugat dalam G yang mengandungi unsur-unsur dengan kuasa ke-n dalam G. Maka

$$P_n(G) = q_n / |G^{[n]}|.$$

Bukti: Andaikan G suatu kumpulan terhingga dan q_n adalah bilangan kelas konjugat dalam G yang mengandungi unsur-unsur dengan kuasa ke-n. Andaikan juga G suatu kumpulan yang bertindak ke atas set $G^{[n]}$ secara kekonjugatan. Katalah $g \in G$ dan

$x \in G^{[n]}$. Dari usulan 3.1, jika $x = g^n$ maka $y \in cl(x)$ mengimplikasikan $y = h^n$. Oleh itu, y juga adalah kuasa ke-n bagi suatu unsur dalam G. Dengan menggunakan Teorem 2.1, diperoleh $P_1(x) = m/|X|$ dengan m adalah bilangan orbit dan $X = G^{[n]}$. Oleh kerana $|X| = |G^{[n]}|$ dan G bertindak ke atas $G^{[n]}$ secara kekonjugatan maka dari takrif orbit, $O_x = \phi(x)$. Ini mengimplikasikan $O_x = \phi(x) = g^{-1}xg$, iaitu O_x mewakili bilangan kelas konjugat dalam G. Oleh itu, $P_n(G) = q_n / |G^{[n]}|$.

Usulan 3.2 Andaikan G adalah suatu kumpulan dan g adalah sebarang unsur dalam G. Jika g adalah suatu unsur yang berperingkat ganjil, maka g terkandung dalam $G^{[2]}$.

Bukti: Andaikan $g \in G$ dan $|g| = 2m+1, m \in \mathbb{Z}$. Maka $g^{2m+1} = e$. Ini mengimplikasikan $g = (g^{-1})^{2m}$. Maka diperoleh $g = (g^{-m})^2$, iaitu g adalah kuasa dua bagi suatu unsur dalam G. Oleh itu, g terkandung dalam $G^{[2]}$.•

Dari usulan di atas, didapati korolari berikut.

Korolari 3.1 Untuk sebarang kumpulan G yang berperingkat ganjil, $G = G^{[2]}$.

Bukti: Andaikan G berperingkat ganjil dan $g \in G$. Maka $|g| = 2m+1, m \in \mathbb{Z}$. Ini memberikan $g^{2m+1} = e$ atau $g = (g^{-m})^2$. Oleh itu $g \in G^{[2]}$ yang mengimplikasikan $G \subseteq G^{[2]}$. Sebaliknya, katakan $g \in G^{[2]}$. Maka $g^2 = e$ atau $g = g^{-1} \in G$. Oleh itu $G^{[2]} \subseteq G$.

Seterusnya diperoleh teorem berikut.

Teorem 3.3 Untuk sebarang kumpulan G yang berperingkat ganjil, $P_1(G) = P_2(G)$.

Bukti: Andaikan G adalah suatu kumpulan yang berperingkat ganjil. Dari teorem 2.1, diperolehi $P_1(G) = k/|G|$ dengan k adalah bilangan kelas konjugat dalam G. Dari teorem 3.3, diperolehi pula $P_2(G) = q_2 / |G^{[2]}|$ dan Korolari 3.1 mengimplikasikan $|G| = |G^{[2]}|$.

Katalah $G = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ dan $G^{[2]} = \{y_1, y_2, ..., y_n\} = \{x_1^1, x_2^2, ..., x_n^2\}$ dengan x bersifat konjugat. Oleh kerana peringkat bagi G dan $G^{[2]}$ adalah sama maka setiap unsur dalam G dan $G^{[2]}$ mempunyai pasangan masing-masing. Dari Usulan 3.1, oleh kerana setiap unsur dalam G adalah dalam satu kelas konjugat maka untuk setiap $y \in cl(x)$ dengan x adalah kuasa ke-n bagi suatu unsur dalam G mengimplikasikan

y juga adalah kuasa ke-n bagi suatu unsur dalam G. Ini memberikan $k = q_2$, iaitu bilangan kelas konjugat dalam G adalah sama dengan bilangan kelas konjugat yang mempunyai kuasa 2 dalam $G^{[2]}$. Ini mengimplikasikan bahawa $P_1(G) = P_2(G)$. •

Dalam Seksyen 1, telah dinyatakan bahawa nilai kebarangkalian bagi $P_1(G)$ adalah tidak melebihi $\frac{5}{8}$. Didapati, $P_2(G)$ juga mempunyai suatu batas atas seperti yang ditunjukkan dalam teorem berikut.

Teorem 3.4 Andaikan G adalah suatu kumpulan dengan $P_2(G) \neq 1$ dan $G^{[2]} \leq G$. Maka $P_2(G) \leq 3/4$ dan ini adalah batas atas bagi $P_2(G)$.

Bukti: Dari Teorem 3.2, diperoleh $P_2(G) = q_2 / |G^{[2]}|$. Maka untuk memaksimumkan $P_2(G)$, kita mestilah memaksimumkan q_2, iaitu bilangan kelas konjugat dengan unsur-unsurnya adalah kuasa ke-2 bagi suatu unsur dalam G. Andaikan H suatu subkumpulan bagi G, maka setiap unsur dalam H dengan $H = Z(G) \cap G^{[2]}$ adalah juga salah satu unsur bagi kelas konjugat. Maka kita mahukan H menjadi semaksimum yang mungkin supaya diperoleh nilai $P_2(G)$ yang terbesar. Dari Teorem Lagrange, $|H|$ mestilah membahagi $|G^{[2]}|$. Maka peringkat terbesar yang mungkin bagi H adalah $\frac{1}{2}|G^{[2]}|$, atau sebaliknya G akan menjadi kumpulan pusat-2. Sebahagian lagi $\frac{1}{2}|G^{[2]}|$ mestilah dibahagikan kepada suatu kelas konjugat dengan peringkat yang lebih besar atau sama dengan 2. Oleh itu, perlu dibahagikan lagi $\frac{1}{2}|G^{[2]}|$ yang tinggal kepada suatu kelas konjugat yang berperingkat 2, memberikan $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}|G^{[2]}|\right)$. Maka diperoleh

$$q_2 \leq \tfrac{1}{2}|G^{[2]}| + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}|G^{[2]}|\right) = \tfrac{3}{4}|G^{[2]}|.$$

Oleh itu, dari Teorem 3.2, didapati $P_2(G) \leq \frac{3}{4}|G^{[2]}| \Big/ |G^{[2]}|$. Ini memberikan $P_2(G) \leq 3/4$. •

4.0 KESIMPULAN

Dalam kajian ini, teori kumpulan digunakan untuk melihat kebarangkalian bagi suatu pasangan unsur rawak yang kalis tukar tertib dalam suatu kumpulan. Kajian yang telah dilakukan meliputi beberapa kumpulan seperti kumpulan simetrik, kumpulan

dwihedron, dan kumpulan kuaternion. Dari kajian tersebut, dapat disimpulkan bahawa nilai kebarangkalian tersebut tidak melebihi $\frac{5}{8}$.

Seterusnya, kajian dilakukan pula kepada kumpulan pusat-2. Dalam kajian ini, beberapa keputusan yang berkaitan dengan $P_n(G)$, kebarangkalian bahawa suatu unsur rawak dengan kuasa ke-n dalam suatu kumpulan pusat-2 G adalah kalis tukar tertib dengan unsur rawak yang lain dalam kumpulan yang sama telah diberikan. Satu teorem telah dikemukakan untuk membuktikan kebarangkalian bahawa suatu unsur rawak dengan kuasa ke-2 dalam suatu kumpulan adalah kalis tukar tertib dengan suatu unsur rawak lain dalam kumpulan tersebut tidak melebihi.

RUJUKAN

[1] Erdos, P., dan P. Turan. 1968. On Some Problems of Statistical Group Theory. *Acta Math. Acad. Of Sci. Hung*. 19: 413-435.

[2] Gustafson, W. 1973. What is the Probability that Two Group Elements Commute? *American Mathematical Monthly*. 80: 1031-1034.

[3] MacHale, D. 1974. How Commutative Can a Non-commutative Group Be? *The Mathematical Gazette*. 58: 199-202.

[4] Rusin, D. 1979. What is the Probability that Two Group Elements of a Finite Group Commute? *Pacific Journal of Mathematics*. 82: 237-247.

[5] Sherman, G. 1975. What is the Probability an Automorphism Fixes a Group Element? *American Mathematical Monthly*. 8: 261-264.