Prosiding Simposium Kebangsaan
Sains Matematik Ke-V (1992) 183-187

PENYELESAIAN TEPAT BAGI PERSAMAAN BURGERS TAK HOMOGEN

Mohd. Nor bin Mohamad.
Jabatan Matematik,
Fakulti Sains,
Universiti Teknologi Malaysia,
Kampus Skudai,
80990 Johor Bahru.

Abstrak. Penyelesaian tepat bagi persamaan Burgers tak homogen diperoleh dengan cara menurunkan persamaan tersebut kepada bentuk bilinear melalui penjelmaan pembolehubah tak bersandar. Penyelesaian yang diperoleh adalah dalam bentuk gelombang bergerak.

1. PENGENALAN

Diketahui bahawa persamaan Burgers

$$u_t + 2auu_x + 5bu_{xx} = 0, \quad (b < 0) \tag{1.1}$$

menggambarkan perambatan gelombang dalam medan jauh bagi suatu sistem kelesapan tak linear [1]. Selain daripada itu persamaan ini juga digunakan untuk memodelkan aliran bergelora dalam saluran (Burgers [2]) dan juga struktur suatu gelombang kejutan (Lighthill [3]). Persamaan (1.1) mempunyai penyelesaian dalam bentuk gelombang bergerak berbentuk

$$u(x,t) = \frac{k}{a} + \frac{5bk}{a} \tanh k(x - 2kt), \tag{1.2}$$

dengan k sebarangan. Kewujudan penyelesaian di atas adalah hasil daripada imbangan antara kesan kelesapan dan berolak. Persamaan (1.1) boleh diselesaikan secara tepat dengan menurunkannya kepada persamaan resapan haba

$$f_t = -5bf_{xx} \tag{1.3}$$

melalui penjelmaan Cole-Hopf (Cole [4], Hopf [5])

$$u(x,t) = 5\left(\frac{b}{a}\right)\frac{\partial}{\partial x} \ln f(x,t). \tag{1.4}$$

Persamaan resapan tak linear jenis Fisher

$$u_t = u_{xx} + cF(u), \tag{1.5}$$

dengan F(u) polinomial terhadap u, pada permulaannya wujud dalam teori pemilihan genetik suatu spesis (Fisher [6]). Persamaan ini juga ditemui dalam teori pembakaran dan kinetik gas (Aris [7], Fife [8]) dan juga dalam teori reaktor nuklear (Canosa [9]).

Usaha mencari penyelesaian tepat bagi persamaan (1.5) telah dilakukan bagi kes F(u) dalam bentuk fungsi kuadratik dan kubik terhadap u. Ablowitz dan Zeppetella [10] telah mengkaji persamaan

$$u_t = u_{xx} + u(1 - u). \tag{1.6}$$

Mereka menggunakan analisis Painlevé untuk memperoleh ungkapan bagi penyelesaian gelombang bergerak

$$u(x,t) = \frac{1}{[1 + \exp\{(\pm x - 5t)/\sqrt{6}\}]^2}. \tag{1.7}$$

Motivasi daripada perbincangan di atas ialah untuk mencari penyelesaian tepat bagi gabungan persamaan (1.1) dan (1.6). Pada amnya persamaan ini berbentuk

$$u_t + 2auu_x + 5bu_{xx} + cF(u) = 0, \tag{1.8}$$

yang dikenali sebagai persamaan Burgers dengan sebutan tindak balas.

Dalam bahagian 2, kita akan memaparkan kaedah mencari penyelesaian tepat bagi persamaan (1.8) apabila F(u) = u(1 - u). Kertas kerja ini diakhiri dengan memberikan kesimpulan ringkas mengenai kaedah yang digunakan dan juga mencadangkan suatu masalah untuk kajian pada masa akan datang.

2. PENYELESAIAN BAGI KES F(u) = u(1 - u)

Sekarang, kita pertimbangkan persamaan

$$u_t + 2auu_x + 5bu_{xx} + cu(1 - u) = 0, \qquad (2.1)$$

dengan a, b dan c pemalar. Dalam sebutan f, melalui penjelmaan

$$u(x,t) = \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x}\ln f(x,t), \qquad (2.2)$$

persamaan (2.1) menjadi

$$\frac{1}{a}\left(\frac{f_{xt}}{f} - \frac{f_x f_t}{f^2}\right) + 2a\left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{f_x}{f}\right)\left(\frac{f_{xx}}{f} - \frac{f_x^2}{f^2}\right)$$

$$+ 5b\left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{f_{xxx}}{f} - \frac{3f_x f_{xx}}{f^2} + \frac{2f_x^3}{f^3}\right) + \left(\frac{c}{a}\right)\frac{f_x}{f} - \left(\frac{c}{a^2}\right)\frac{f_x^2}{f^2} = 0,$$

dan selepas melakukan manipulasi aljabar, ungkapan ini terturun kepada

$$f_{xt}f - f_x f_t + 2f_x f_{xx} - \frac{2f_x^3}{f} + 5bf_{xxx}f$$

$$- 15bf_x f_{xx} + \frac{10bf_x^3}{f} + cf_x f - \frac{c}{a}f_x^2 = 0. \qquad (2.3)$$

Penyelesaian gelombang bergerak yang menghampiri sifar apabila $|x| \longrightarrow \infty$ diperoleh dengan andaian

$$f(x,t) = 1 + \exp(kx - \omega t). \qquad (2.4)$$

Jika digantikan (2.4) ke dalam (2.3), maka persamaan (2.4) merupakan suatu penyelesaian bagi persamaan (2.3) jika

$$b = \frac{1}{5}, \quad k = a \quad \text{and} \quad \omega = a^2 + c.$$

Seterusnya, ungkapan tak tersirat bagi u diberi oleh

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \frac{1}{2}\{ax - (a^2 + c)t\}. \tag{2.5}$$

Penyelesaian ini menggambarkan gelombang bergerak yang bertukar secara monoton dari 0 kepada 1 dan mempunyai halaju $(a^2 + c)$. Gelombang ini merambat dalam arah negatif jika $c < -a^2$, dalam arah positif jika $c > -a^2$ dan berada dalam keadaan keseimbangan jika $c = -a^2$.

Perhatikan bahawa apabila $c \longrightarrow 0$, persamaan (2.5) terturun kepada persamaan (1.2) dengan nombor gelombang $k = a/2$. Sebaliknya, apabila $a \longrightarrow 0$, persamaan (2.5) hilang sifat sebagai gelombang bergerak dan menjadi penyelesaian pegun.

3. KESIMPULAN

Daripada perbincangan di atas kita lihat bentuk bilinear bagi persamaan evolusi tak linear yang ditulis dalam bentuk pengoperasi Hirota memainkan peranan yang penting untuk mencri penyelesaian tepat. Struktur persamaan bilinear adalah jelas dan memudahkan analisis aljabar.

Sebagai mengakhiri kertas kerja ini elok dinyatakan di sini bahawa persamaan

$$u_t + 2auu_x + 5bu_{xx} + cu(1 - u)(\alpha - u) = 0,$$

dengan a, b dan c pemalar, boleh juga diselesaikan dengan cara yang sama. Masalah ini ditinggalkan untuk kajian pada masa akan datang. Persamaan ini dengan $a = 0$ telah dikaji oleh Kawahara dan Tanaka [11].

RUJUKAN

[1]. Drazin, P.G. and Johnson, R.S, *Solitons: An introduction*. Cambridge University Press, 1989.

[2]. Burgers, J.M, *A mathematical model illustrating the theory of turbulence*. Adv. Appl. Mech. 1(1948), 171-199.

[3]. Lighthill, M.J, *Viscosity effects in sound wave of finite amplitude.* In surveys in Mechanics, ed. G.K. Batchelor and R.M. Davies. Cambridge University Press, 1956.

[4]. Cole, J.D, *On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics*, Quart. Appl. Math. **6**(1951), 225-236.

[5]. Hopf, E, *The partial differential equation* $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$. Comm. Pure Appl. Math. **3**(1950), 201-230.

[6]. Fisher, R.A, *The wave of advance of advantageous genes.* Ann. Eugenics **7**(1936), 355-369.

[7]. Aris, R, *The mathematical theory of diffusion and reaction in permeable catalysts.* Oxford University Press, 1975.

[8]. Fife, P.C, *Mathematical aspects of reacting and diffusing systems*. Springer Lecture Notes in Biomathematics, Vol. **28**, Heildelberg: Springer-Verlag, 1979.

[9]. Canosa, J, *Diffusion in nonlinear multiplicative media*. J. Math. Phys. **10**(1969), 1862-1868.

[10]. Ablowitz, M.J. and Zeppetella, A, *Explicit solutions of Fisher's equation for a special wave speed.* Bull. Math. Bio. **41**(1979), 835-840.

[11]. Kawahara, T, and Tanaka, M, *Interactions of travelling fronts: An exact solution of a nonlinear diffusion equation.* Phy. Lett. **97A**(1983), 311-314.