KERATAN EMAS

Ali bin Abdul Rahman
Jabatan Matematik
Universiti Teknologi Malaysia

ABSTRAK

Nombor bukan-nisbah yang paling biasa digunakan ialah pai dan e, mungkin kerana masing-masing tersirat dalam banyak kejadian alam. Di dalam kertas ini, satu lagi nombor bukan-nisbah, yang mungkin setanding dengan pai dan e, diperkenalkan. Sifat-sifat istimewanya dan perwakilan-perwakilan lain baginya dinyatakan. Seterusnya, beberapa kemunculannya dibincangkan.

1. Pengenalan

Nombor bukan-nisbah yang paling biasa digunakan ialah pai, iaitu nisbah di antara bulatan dan diameternya. Yang kedua yang banyak tersirat di dalam kejadian alam ialah e yang biasa ditakrifkan sebagai

$$\operatorname*{had}_{h\to 0} \left(1 + h\right)^{1/h}$$

Tidak ramai orang yang menyedari wujudnya satu lagi nombor bukan-nisbah yang berkelibar sedemikian sehingga boleh menandingi pai dan e. Nombor ini dikenali sebagai keratan emas dan akan ditulis di sini sebagai ϕ.

Perhatikan persamaan kuasadua

$$x^2 - x - 1 = 0 \tag{1}$$

Persamaan ini mempunyai dua punca iaitu

$$(1 + \sqrt{5})/2 \qquad \text{dan} \qquad (1 - \sqrt{5})/2 \tag{2}$$

Kita takrifkan ϕ sebagai punca pertama di atas. Perhatikan bahawa punca kedua boleh dinyatakan dalam sebutan ϕ iaitu

$$1 - \phi \qquad (3)$$

ϕ adalah satu-satunya nombor yang mempunyai sifat bila ditolak satu daripadanya, hasilnya ialah salingannya iaitu $1/\phi$. Dengan pengetahuan ini, kita boleh juga tulis punca kedua bagi persamaan (1) sebagai

$$- 1/\phi \qquad (4)$$

2. Perwakilan-Perwakilan Lain

Seperti juga pai dan e yang mempunyai perwakilan-perwakilan lain selain dari takrif masing-masing, ϕ juga boleh dinyatakan seperti berikut :

(a) dalam bentuk pecahan berterusan

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}} \qquad (5)$$

(b) dalam bentuk punca-dua berterusan

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots\cdots\cdots}}}}} \qquad (6)$$

Perwakilan (5) membolehkan kita mengira ϕ hingga ke seberapa titik perpuluhan yang kita kehendaki.

3. Kemunculan-Kemunculan Keratan Emas

Keratan emas telah diketahui orang sejak dulu kala lagi. Misalnya, orang-orang Mesir dan Yunani dipercayai telah menggunakan ϕ dalam pembinaan-pembinaan mereka. Di dalam matematik, ϕ kerap muncul di dalam teori nombor, terutama sebagai had-had. Di dalam matematik gunaan, ianya timbul dalam pengoptimuman, analisis berangka dan geometri. Berikut adalah kemunculan-kemunculan ϕ yang saya jumpai dalam bidang-bidang tertentu (dan saya kumpulkan di sini); pembaca mungkin telah menemui contoh-contoh lain.

3.1. Biologi

Pada awal kurun ke 13, seorang saintis bangsa Itali yang dikenali sebagai Fibonacci telah menjumpai suatu jujukan integer-integer semasa memerhatikan pembiakan arnab. Beliau mengandaikan arnab-arnab mengambil masa sebulan untuk mencapai peringkat kesuburan dan sebulan lagi untuk melahirkan dua ekor anak. Katakan F_n adalah bilangan pasangan arnab yang hidup selepas n bulan. Bermula dari sepasang arnab, kita perhatikan :

$$F_0 = F_1 = 1 \qquad (7)$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{bagi } n = 2, 3 \ldots\ldots \qquad (8)$$

Kita telah dapat suatu persamaan perbezaan (8) bersama syarat permulaan (7), yang menghasilkan suatu jujukan integer-integer 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Jujukan ini dikenali dengan jujukan Fibonocci. Kita boleh selesaikan persamaan perbezaan di atas untuk mendapatkan rangkapan bagi sebutan umum dalam n.

Perhatikan persamaan cirian bagi (8) adalah setara dengan persamaan (1); jadi, nilai-nilai ciriannya ialah ϕ dan $1-\phi$. Memasukkan syarat-syarat permulaan di dalam

$$F_n = A\phi^{n+1} + B(1-\phi)^{n+1} \qquad (9)$$

...50/-

kita dapati bahawa

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\phi^{n+1} - (1-\phi)^{n+1} \right] \qquad (10)$$

Adalah mungkin menghairankan yang suatu rangkapan melibatkan nombor bukan-nisbah ϕ boleh menjanakan suatu jujukan nombor-nombor yang semuanya terdiri dari integer belaka.

Dengan pengetahuan tentang penyelesaian (10) kepada jujukan Fibonacci (7) dan (8), kita dengan mudah boleh membuktikan bahawa

$$\underset{n\to\infty}{\text{had}} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi \qquad (11)$$

Had di dalam (11) boleh juga digunakan untuk mengira nilai ϕ hingga ke seberapa titik perpuluhan yang dikehendaki. Dengan n=27, kejituan 9 titik perpuluhan boleh dicapai.

Penggunaan jujukan Fibonacci banyak terdapat di dalam bidang-bidang lain seperti teori *nombor dan pengoptimuman.*

3.2. Masalah Pengoptimuman

Dalam masalah pengoptimuman, kita sering mencari maksimum atau minimum bagi suatu fungsi, kadangkala tertakluk kepada kekangan-kekangan tertentu. Di sini, kita akan bincangkan suatu kaedah carian dalam matra -1, iaitu untuk memaksimumkan suatu fungsi dalam satu pembolehubah, tanpa kekangan, dan di mana terbitannya tidak diketahui.

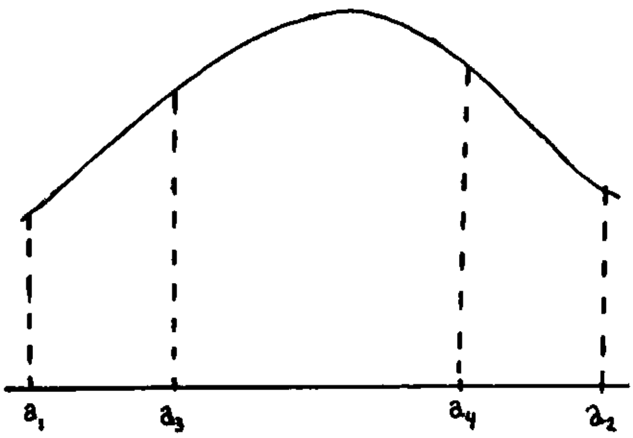
Katalah sela (a_1,a_2) mengurung maksimum bagi f(x) yang dikehendaki. Letakkan titik-titik a_3 dan a_4 secara bersimetri dalam sela ini, supaya

$$a_3 = (1-\alpha)a_1 + \alpha a_2 \qquad (12)$$

$$0<\alpha<\tfrac{1}{2}$$

$$a_4 = \alpha a_1 + (1-\alpha)a_2 \qquad (13)$$

(lihat gambarajah 1)



Gambarajah 1

Kiralah $\quad f_i = f(a_i) \qquad i = 1, 2, 3, 4$ (14)

Maka samada $\quad f_4 > f_3$ (15)

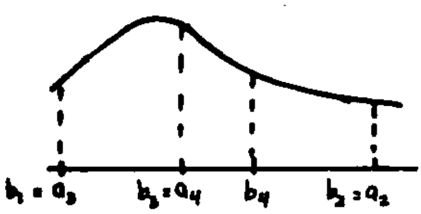
atau $\quad f_3 \geq f_4$ (16)

Jika (15) berlaku, maka (a_3,a_2) mengurung maksimum dan jika (16) berlaku, maka (a_1,a_4) mengurung maksimum.

Hal I

$f_4 > f_3$

Label semula (a_3,a_2)



Letakkan dengan bersimetri

$$b_3 = (1-\beta)b_1 + \beta b_2$$

atau $a_4 = (1-\beta)a_3 + \beta a_2$

Gunakan (12) dan (13):

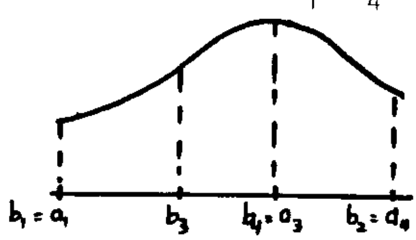
$$\beta = \frac{1 - 2\alpha}{1 - \alpha}$$

kira $b_4 = \beta b_1 + (1-\beta)b_2$

Hal II

$f_4 \leq f_3$

label semula (a_1, a_4)



Letakkan secara bersimetri

$$b_4 = \beta b_1 + (1-\beta)b_2$$

atau $a_3 = \beta a_1 + (1-\beta)a_4$

Gunakan (12) dan (13)

$$\beta = \frac{1 - 2\alpha}{1 - \alpha}$$

Kira $b_3 = (1-\beta)b_1 + \beta b_2$

...52/-

Dalam kedua-dua hal ini, β mempunyai nilai yang sama iaitu yang ditentukan secara tunggal oleh α. Kaedah ini boleh diteruskan dengan cara yang sama, pembahagian sela secara bersimetri dilakukan berturut-turut sehingga panjang sela adalah cukup kecil.

Jujukan pecahan-pecahan α ,β , ... boleh dilabel semula dengan lebih mudah sebagai α_1, α_2 , α_3 ... dan pecahan-pecahan ini memenuhi hubungan rekursi

$$\alpha_{n+1} = \frac{1 - 2\alpha_n}{1 - \alpha_n} \tag{17}$$

Pilihan perlu dibuat bagi nilai-nilai α_i yang memenuhi (17). Suatu cara yang biasa ialah dengan memilih

$$\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots\ldots..$$

Dengan pilihan ini, hubungan (17) menghasilkan

$$\alpha = \frac{1 - 2\alpha}{1 - \alpha}$$

iaitu $\alpha = 2 - \phi$

Kaedah yang menggunakan nilai-nilai sedemikian dinamakan kaedah <u>carian emas</u>.

Cara kedua menggunakan nombor-nombor di dalam jujukan Fibonacci, yang memulakan proses dengan suatu nombor, N, bilangan pembahagian sela, yang diberi. Dengan

$$\alpha_i = \frac{F_{N-i-1}}{F_{N-i+1}}$$

hubungan (17) akan dipenuhi. Kaedah kedua ini dikenali sebagai <u>carian Fibonacci</u>. Kaedah ini mendapatkan hasil 17% lebih baik dari kaedah keratan emas.

Berbanding dengan kaedah-kaedah carian dalam matra-1 yang lain, carian Fibonacci sering dianggap suatu kaedah yang optima bagi suatu bilangan langkah yang tertentu kerana pembahagian sela terbaik akan didapatkan. Terbitan tidak diperlukan. Algoritmanya mudah terutama bila komputer digunakan. Tambahan pula, hanya 4 titik perlu disimpan di setiap langkah dan sela terakhir boleh dikira di permulaan proses.

3.3. Teori Nombor

Walaupun teori nombor hanya membincangkan sifat-sifat integer, nombor bukan-nisbah keratan emas kerap muncul, terutamanya sebagai suatu had bagi rangkapan-rangkapan tertentu. Di sini saya akan beri contoh di dalam teori partisi.

Teori partisi adalah suatu bidang teori nombor tambahan, suatu perkara berkenaan dengan perwakilan integer-integer sebagai hasil-tambah-hasiltambah integer-integer lain.

Suatu partisi bagi suatu integer bukan-negatif n adalah suatu perwakilan n sebagai suatu hasiltambah integer-integer positif, dinamakan bahagian-bahagian bagi partisi itu. Tertiban bahagian-bahagian tidak diambilkira.

Contoh Partisi-partisi bagi 5 ialah :

5, 4+1, 3+2, 3+1+1, 2+2+1, 2+1+1+1, 1+1+1+1+1

Jika kita takrifkan -(n) sebagai bilangan partisi bagi nombor n, maka kita lihat p(5) = 7 dan p(0) = 1.

Dua tokoh terkemuka dalam teori nombor, Hardy dan Ramanujan, telah mendapatkan suatu rangkapan tepat bagi p(n) bagi sebarang integer n, dan adalah menarik memerhatikan bahawa rangkapan itu melibatkan terbitan d/dn. Dengan adanya rumusan seperti itu, dapatlah prang mengira p(n) bagi integer n yang besar. Misalnya, telah didapati yang

$$p(200) = 3{,}972{,}999{,}029{,}388$$

...54/-

Sebenarnya, $p(n)$ bukanlah semudah yang dilihat di sini. Ramanujan telah mendapati

$$p(5n + 4) \equiv 0 \bmod 5,$$

dan kajian kongruen-kongruen seperti ini melibatkan sifat-sifat dalam bagi fungsi-fungsi modul elliptik.

Suatu teorem oleh Euler menyatakan, bilangan partisi bagi suatu integer n dimana semua bahagian adalah ganjil adalah sama dengan bilangan partisi bagi n di mana semua bahagian adalah berlainan.

Contoh

Terdapat 3 partisi bagi 5 kepada bahagian-bahagian ganjil:

$$5, \quad 3+1+1, \quad 1+1+1+1+1$$

Terdapat 3 partisi bagi kepada bahagian-bahagian berlainan:

$$5, \quad 4+1, \quad 3+2$$

Kita pendekkan cerita dengan mentakrifkan dua fungsi, iaitu $D_2(n)$ dan $D_2'(n)$, dan seterusnya menyatakan suatu kaitan antara kedua-duanya dengan keratan emas. Kedua-dua fungsi ini muncul dalam identiti-identiti Rogers-Ramanujan yang memainkan suatu peranan utama dalam teori nombor tambahan.

Takrifkan $D_2(n)$ bagi suatu integer n sebagai bilangan partisi bagi n dimana sebarang dua bahagian mempunyai perbezaan sekurang-kurang nya 2.

Contoh

Partisi-partisi bagi 5 yang sedemikian ialah

$$5, \quad 4+1$$

Jadi, $D_2(5) = 2$.

Takrifkan juga $D_2'(n)$ bagi suatu integer n sebagai bilangan partisi bagi n di mana sebarang dua bahagian mempunyai perbezaan sekurang-kurangnya 2 dan semua bahagian adalah lebih dari 1.

Contoh

Partisi-partisi bagi 5 yang sedemikian ialah 5.

Jadi, $D_2'(5) = 1$

Teorem berikut dinyatakan tanpa bukti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D_2(n)}{D_2'(n)} = \phi \qquad (18)$$

3.4. Analisis Berangka

Kaedah sekan adalah suatu kaedah berangka yang boleh digunakan untuk menganggar suatu punca nyata bagi suatu persamaan

$$f(x) = 0$$

Katalah punca sebenar bagi (1) yang tidak diketahui ditulis sebagai ζ. Bermula dengan dua tekaan awal, x_o dan x_1, kepada punca ζ, suatu jujukan nombor-nombor x_3, x_4, x_5, ... yang hampir-hampir pasti menumpu kepada ζ boleh didapatkan, melalui algoritma berikut:

Bagi n = 1, 2, ...
$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\,\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \qquad (19)$$

Perhatikan yang anggaran kepada punca di langkah ke n ialah x_{n+1}. Jadi kita boleh tarifkan ralat di langkah ke n, e_{n+1} :

$$e_{n+1} = \zeta - x_{n+1} \qquad \text{bagi } n = 1, 2, \ldots (20)$$

...56 /-

Dalam menganalisakan suatu algoritma berangka, kita sering bertanya, "berapa lajukah penumpuan?" Suatu cara menjawab soalan ini ialah dengan memerhatikan bagaimanakah ralat menyusut. Ini boleh dilihat dengan membandingkan ralat-ralat di dua langkah berturutan.

Kita takrifkan peringkat penumpuan bagi suatu algoritma berangka sebagai suatu nombor nyata k, jika, bagi semua n, ralat di langkah ke n berkadaran langsung dengan kuasa k ralat di langkah ke (n-1), yakni, jika

$$e_{n+1} \propto e_n^k \qquad \text{bagi } n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (21)$$

Jika ralat yang wujud di awal proses ialah kecil, iaitu mak $(|e_0|,|e_1|) < 1$, maka jika $k \geqslant 1$, ralat akan sentiasa menyusut bila n bertambah besar. Dengan k yang lebih besar, kelajuan penyusutan ralat akan bertambah lagi. Misalnya, jika k = 2, dan anggaran di langkah ke n adalah jitu kepada dua titik perpuluhan, maka anggaran di langkah ke (n+1) adalah jitu kepada empat titik perpuluhan, anggaran di langkah ke (n+2) jitu kepada lapan titik perpuluhan, dan seterusnya. Jadinya, kaedah yang mempunyai peringkat penumpuan yang tinggi akan menumpu dengan laju pada kelazimannya. Pada kelazimannya juga, suatu kaedah dengan peringkat penumpuan yang tinggi adalah sukar digunakan, samada syarat-syarat bagi penggunaannya adalah ketat ataupun algoritmanya sendiri adalah rumit. Dalam pemilihan antara beberapa kaedah, suatu kompromi terpaksa dilakukan.

Sekarang kita akan buktikan bahawa peringkat penumpuan bagi kaedah sekan adalah lebihkurang ϕ

Perhatikan dari (21) yang bagi apa-apa kaedah berperingkat penumpuan k,

$$e_{n+1} \propto e_n^k \propto e_{n-1}^{k^2} \qquad (22)$$

dan

$$e_{n-1}e_n \propto e_{n-1}^{k+1} \qquad (23)$$

Katalah kaedah sekan mempunyai peringkat penumpuan k. Dari (20) dan (19),

$$e_{n+1} = \zeta - x_{n+1}$$

$$= \frac{(\zeta - x_{n-1})f(x_n) - (\zeta - x_n)f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$$= \frac{e_{n-1}f(\zeta - e_n) - e_n f(\zeta - e_{n-1})}{f(\zeta - e_n) - f(\zeta - e_{n-1})} \qquad (24)$$

Melalui siri Taylor,

$$f(\zeta - e_i) = f(\zeta) - e_i f'(\zeta) + \frac{e_i^2}{2} f''(\zeta) -+ \ldots . \qquad (25)$$

Memasukkan (25) bagi i = n-1, n, ke dalam (24), mengingatkan bahawa $f(\zeta) = 0$, serta mempermudahkan rangkapan yang terhasil, kita akan dapati

$$e_{n+1} \approx - \frac{f''(\zeta)}{2f'(\zeta)} \; e_{n-1}e_n$$

iaitu $\quad e_{n+1} \propto e_{n-1}e_n$

Menggabungkan hasil-hasil (22), (23) dan (26), kita dapati bahawa

$$e_{n-1}^{k^2} \propto e_{n-1}^{k+1}$$

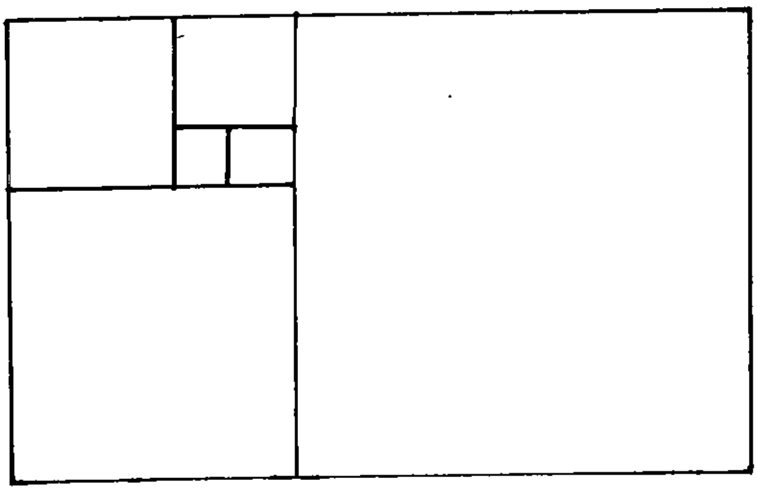
iaitu k memenuhi persamaan (1). Oleh kerana peringkat penumpuan adalah suatu nombor positif, maka peringkat penumpuan bagi kaedah sekan adalah lebihkurang ϕ.

Kaedah sekan seringkali dianggap sebagai suatu kaedah optima bagi menyelesaikan suatu persamaan taklinear bagi punca-punca nyata, kerana ia mempunyai peringkat penumpuan yang cukup tinggi walaupun ia juga mudah untuk digunakan. Kebanyakan kaedah berperingkat lebih tinggi memerlukan pengiraan terbitan-terbitan yang kadangkala merumitkan.

3.5. Geometri

Sebarang perbincangan tentang keratan emas akan ternyata cacatnya jika tidak menyentuh bidang geometri, kerana di dalam geometrilah nombor ini pertama kali digunakan dalam sejarah.

Suatu segiempat tepat adalah segiempat emas jika nisbah panjang kepada lebar bagi segiempat itu adalah ϕ . Suatu sifat menarik bagi suatu segiempat emas ialah, jika kita potongkan segiempat sama yang terbesar di dalamnya maka yang tinggal adalah suatu segiempat emas juga! (Lihat gambarajah 4).



Gambarajah 4. Segiempat Emas

4. Penutup

Dari perbincangan di atas, jelaslah bahawa keratan emas memainkan suatu peranan utama di dalam kehidupan seharian, khususnya di dalam berbagai bidang matematik.

Rujukan-Rujukan

1. Andrews, G. E., Number Theory, W. B. Saunders, 1971.

2. Gardner, Martin, More Mathematical Puzzles and Diversions, Penguin Books.

3. Henrici, Peter, Elements of Numerical Analysis, John Wiley & Sons, 1964.

4. Wismer, D. A., Chattergy, R., Introduction to Nonlinear Optimization, North-Holland, 1978.