Matematika, 1994, Jilid 10, bil. 2, hlm. 49–59

PENGANGGARAN DAN PENGAWALAN RALAT DALAM KAEDAH H_aM-RK4(4) UNTUK PENYELESAIAN MASALAH NILAI AWAL

NAZEERUDDIN YAACOB & BAHROM SANUGI
Jabatan Matematik
Fakulti Sains
Universiti Teknologi Malaysia
Johor Bahru, Johor
Malaysia

Abstrak. Dalam kertas ini satu kaedah baru yang berasaskan gabungan min harmoni dan min aritmatik berperingkat keempat dirumuskan. Kaedah ini, beserta kaedah Runge-Kutta-Harmoni, RK-H_aM dapat membantu menganggarkan ralat dalam penyelesaian masalah nilai awal. Rantau kesetabilan mutlak untuk kaedah ini juga dikaji. Contoh penyelesaian berangka yang dikemukakan menunjukkan keberkesanan kaedah ini.

Katakunci. Kaedah RK–H_aM, kaedah RK-AHM, Kaedah H_aM-RK4(4), kestabilan, anggaran ralat, pengawal ralat.

Abstract. In this paper a new fourth order formula based on harmonic and arithmatic means is formulated. The formula when used with the Harmonic-Runge–Kutta formula is capable of estimating the local trucation error in solving initial value problems. The absolute stability region of the method is also studied. The numerical results presented showed the effectiveness of the method.

Keywords. RK-H_aM method, RK-AHM method, H_aM–RK4(4) method, stability, error estimate, error control.

1 PENGENALAN

Salah satu masalah dalam pelaksanaan kaedah Runge-Kutta klasik ialah kesukaran ketiadaan prosedur penganggaran ralat dalam hasil semasa pengiraan. Ini menjadikan kawalan ralat secara automatik menjadi sukar. Beberapa kaedah telah pun dibangunkan untuk mengatasi kelemahan ini dengan memasukkan suatu cara menganggarkan ralat dalam keputusan. Antaranya, kaedah-kaedah yang terdiri daripada variasi Merson, Scraton dan Fehlberg, (lihat Ferziger[1]). Sanugi [2] telah mengutarakan kaedah AGM, berasaskan min geometri berperingkat keempat digandingkan dengan kaedah yang berasaskan min aritmatik berperingkat keempat juga. Kedua-duanya menggunakan k_i, $i = 1, 2, 3, 4$ yang sama. Disamping itu Sanugi dan Evans [3] telah juga memperkenalkan kaedah Rungge Kutta berasaskan min harmoni peringkat empat. Dengan idea yang serupa malahan lebih mudah lagi, kita akan cuba membina satu rumus kacukan menggunakan k_i, $i = 1, 2, 3, 4$ yang sepunya dalam pernerbitan Rungge–Kutta Harmoni dengan suatu strategi penganggaran ralat. Dalam usaha ini kita akan cuba mendapatkan satu kaedah lain berperingkat empat hasil kacukan atau tindanan dua bentuk min yang berbeza iaitu min harmoni dan min aritmatik. Kaedah ini kita rujuk sebagai kaedah RK-AHM. Gandingan kedua-dua kaedah ini seterusnya kita namakan sebagai kaedah H_aM-RK4(4) (lihat Yaacob dan Sanugi [4]). Matlamat awalnya ialah untuk mendapatkan ralat anggaran bagi kaedah Rungge-Kutta-Harmoni dan seterusnya dengan maklumat ini ia dapat digunakan sebagai prosedur pengawalan pertambahan ralat dalam proses penyelesaian. Analisis seterusnya ditujukan kepada melihat setakat mana kaedah yang terhasil itu sah bagi digunakan untuk masalah tertentu.

2 PENERBITAN KAEDAH RK-AHM PERINGKAT KEEMPAT.

Sanugi dan Evans [3] telah menerbitkan rumus RK-Harmoni, RK-H_aM peringkat ke empat dengan $a_1 = 1/2, a_2 = -1/8, a_3 = 5/8, a_4 = -1/4, a_5 = 7/20$ dan $a_6 = 9/10$,

$$k_1 = f(x_n, y_n), \tag{2.1}$$

$$k_2 = f(x_n + a_1 h, y_n + a_1 h k_1), \tag{2.2}$$

$$k_3 = f(x_n + (a_2 + a_3)h, y_n + a_2 h k_1 + a_3 h k_2), \tag{2.3}$$

$$k_4 = f(x_n + (a_4 + a_5 + a_6)h, y_n + a_4 h k_1 + a_4 h k_1 + a_5 h k_2 + a_6 h k_3), \tag{2.4}$$

$$y_{n+1}^{HM} = y_n + \frac{2h}{3}\left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} + \frac{k_2 k_3}{k_2 + k_3} + \frac{k_3 k_4}{k_3 + k_4}\right) \tag{2.5}$$

Dengan menggunakan a_i yang sama, kita cuba mengolahkan satu rumus yang terdiri daripada gabungan min aritmatik dan min harmoni. Kita andaikan rumus tersebut sebagai

$$\begin{aligned} y_{n+1}^{AHM} = y_n + h\,(d_1 k_1 + d_2 k_2 + d_3 k_3 + d_4 k_4 \\ + d_5\left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\right) + d_6\left(\frac{k_2 k_3}{k_2 + k_3}\right) + d_7\left(\frac{k_3 k_4}{k_3 + k_4}\right)\Big) \end{aligned} \tag{2.6}$$

dengan $d_j, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ adalah wajaran yang akan dicari.

Seterusnya, kita mengembangkan rumus (2.6) dan $y(x_n + h)$ mengikut kembangan siri Taylor dan membandingkan pekali-pekali bagi sebutan-sebutan h, h^2, h^3 dan h^4 masing-masing. Kita perolehi tujuh persamaan berikut:-

$$hf: \quad 1 - d_1 - d_2 - d_3 - d_4 - \frac{d_5}{2} - \frac{d_6}{2} - \frac{d_7}{2} = 0 \tag{2.7}$$

$$h^2 f f_y: \quad \frac{1}{2} - \frac{d_2}{2} - \frac{d_3}{2} - d_4 - \frac{d_5}{8} - \frac{d_6}{8} - \frac{d_7}{8} = 0 \tag{2.8}$$

$$h^3 f f_y^2: \quad \frac{1}{6} - \frac{5d_3}{16} - \frac{5d_4}{8} - \frac{d_5}{32} - \frac{5d_6}{64} - \frac{13d_7}{64} = 0 \tag{2.9}$$

$$h^3 f^2 f_{yy}: \quad \frac{1}{6} - \frac{d_2}{8} - \frac{d_3}{8} - \frac{d_4}{2} - \frac{d_5}{32} - \frac{d_6}{16} - \frac{5d_7}{32} = 0 \tag{2.10}$$

$$h^4 f f_y^3: \quad \frac{1}{24} - \frac{9d_4}{32} - \frac{d_5}{128} - \frac{7d_7}{128} = 0 \tag{2.11}$$

$$h^4 f^2 f_y f_{yy}: \quad \frac{1}{6} - \frac{15d_3}{64} - \frac{25d_4}{32} + \frac{d_5}{64} - \frac{15d_6}{256} - \frac{53d_7}{256} = 0 \tag{2.12}$$

$$h^4 f^3 f_{yyy}: \quad \frac{1}{24} - \frac{d_2}{48} - \frac{d_3}{48} - \frac{d_4}{6} - \frac{d_5}{192} - \frac{d_6}{196} - \frac{3d_7}{64} = 0 \tag{2.13}$$

Penyelesaian serentak sistem linear (2.7)–(2.13) memberikan

$$d_1 = 0,\ d_2 = \frac{1}{6},\ d_3 = \frac{1}{6},\ d_4 = 0,\ d_5 = \frac{2}{3},\ d_6 = 0,\ \text{dan}\ d_7 = \frac{2}{3}.$$

Oleh itu rumus (2.6) menjadi

$$y_{n+1}^{AHM} = y_n + h\left[\frac{1}{6}k_2 + \frac{1}{6}k_3 + \frac{2}{3}(\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}) + \frac{2}{3}(\frac{k_3k_4}{k_3+k_4})\right] \tag{2.14}$$

3 ANALISIS KESTABILAN.

Dengan persamaan ujian $y' = \lambda y$, λ suatu nombor kompleks, kita cuba dapatkan rantau rantau kesetabilan mutlak bagi kaedah RK–H_aM dan RK–AHM. Seterusnya kita perolehi

$$k_1 = f(y_n) = \lambda y_n \tag{3.1}$$

$$k_2 = f(y_n + \frac{hk_1}{2}) = \lambda y_n(1 + \frac{\lambda h}{2}) \tag{3.2}$$

$$k_3 = f(y_n - \frac{hk_1}{8} + \frac{5hk_2}{8}) = \lambda y_n(1 + \frac{\lambda h}{2} + \frac{5(\lambda h)^2}{16}) \tag{3.3}$$

$$k_4 = f(y_n - \frac{hk_1}{4} + \frac{7hk_2}{20} + \frac{9hk_3}{10}) = \lambda y_n(1 + \lambda h + \frac{5(\lambda h)^2}{8} + \frac{9(\lambda h)^3}{32}) \tag{3.4}$$

$$\frac{k_1k_2}{k_1+k_2} = \lambda y_n(\frac{1}{2} + \frac{(\lambda h)}{8} - \frac{(\lambda h)^2}{32} + \frac{(\lambda h)^3}{128} - \frac{(\lambda h)^4}{512} + \frac{(\lambda h)^5}{2048} + O(h^6)) \tag{3.5}$$

$$\frac{k_2k_3}{k_2+k_3} = \lambda y_n(\frac{1}{2} + \frac{(\lambda h)}{4} + \frac{5(\lambda h)^2}{64} - \frac{25(\lambda h)^4}{2048} + \frac{25(\lambda h)^5}{4096} + O(h^6)) \tag{3.6}$$

$$\frac{k_3k_4}{k_3+k_4} = \lambda y_n(\frac{1}{2} + \frac{3(\lambda h)}{8} + \frac{13(\lambda h)^2}{64} + \frac{7(\lambda h)^3}{128} - \frac{43(\lambda h)^4}{2048} + \frac{45(\lambda h)^5}{8192} + O(h^6)) \tag{3.7}$$

Seterusnya, kita masukkan nilai-nilai ini kedalam rumus (2.5) dan (2.14). Ini menghasilkan

$$y_{n+1}^{HM} = y_n(1 + (\lambda h) + \frac{(\lambda h)^2}{2} + \frac{(\lambda h)^3}{6} + \frac{(\lambda h)^4}{24} - \frac{3(\lambda h)^5}{128} + O(h^6)) \tag{3.8}$$

$$\frac{y_{n+1}^{HM}}{y_n} = 1 + (\lambda h) + \frac{(\lambda h)^2}{2} + \frac{(\lambda h)^3}{6} + \frac{(\lambda h)^4}{24} - \frac{3(\lambda h)^5}{128} + O(h^6)) \tag{3.9}$$

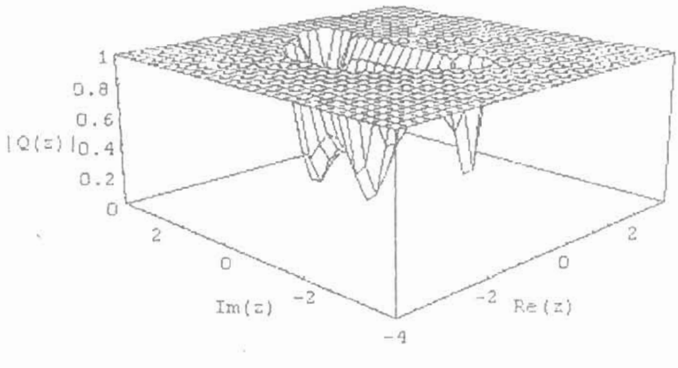
dan

$$y_{n+1}^{AHM} = y_n(1 + (\lambda h) + \frac{(\lambda h)^2}{2} + \frac{(\lambda h)^3}{6} + \frac{(\lambda h)^4}{24} - \frac{47(\lambda h)^5}{3072} + O(h^6)) \tag{3.10}$$

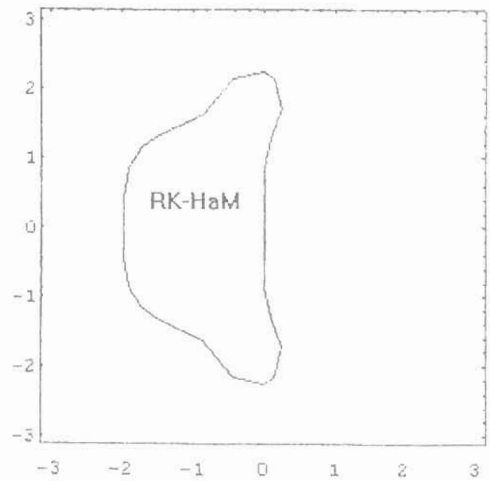
$$\frac{y_{n+1}^{AHM}}{y_n} = 1 + (\lambda h) + \frac{(\lambda h)^2}{2} + \frac{(\lambda h)^3}{6} + \frac{(\lambda h)^4}{24} - \frac{47(\lambda h)^5}{3072} + O(h^6)) \tag{3.11}$$

Jika $\lambda h = z$, dari (3.9) kita perolehi polinomial kesetabilan bagi kaedah RK–H_aM

$$Q^{HM}(z) = \frac{y_{n+1}^{HM}}{y_n} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} - \frac{3z^5}{128} + O(h^6) \tag{3.12}$$



Rajah 1a Permukaan yang ditakrifkan oleh polinomial kestabilan $|Q^{HM}(z)| = \left|1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} - \frac{3z^5}{128}\right| \leq 1$

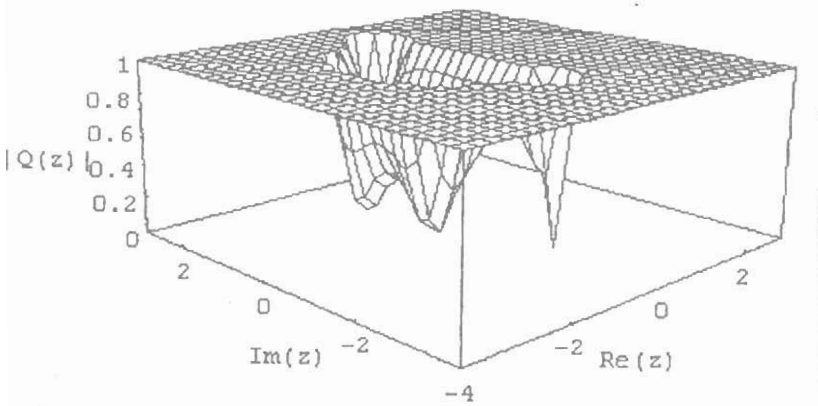


Rajah 1b Rantau kestabilan mutlak bagi kaedah RK–H_aM bila $|Q(z)| = 1$

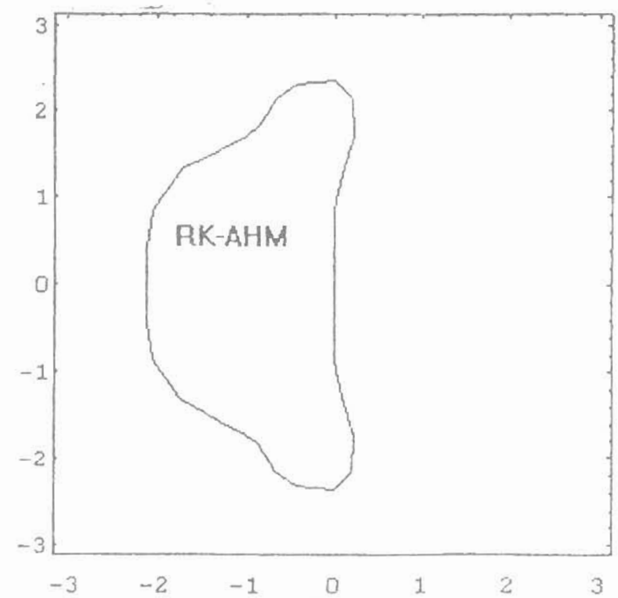
dan dari (3.11) kita perolehi polinomial kestabilan bagi kaedah RK–HAM

$$Q^{AHM}(z) = \frac{y_{n+1}^{AHM}}{y_n} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} - \frac{47z^5}{3702} + O(h^6) \qquad (3.13)$$

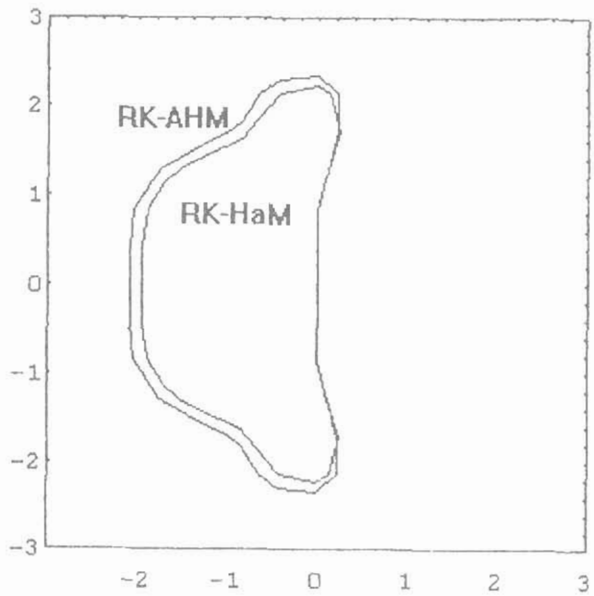
Rajah 1a dan 1b masing-masing menunjukkan permukaan yang ditakrif oleh polinomial $|Q^{HM}(z) \leq 1$ dan rantau kestabilan mutlak RK–H_aM, manakala rajah 2a dan 2b menunjukkan permukaan yang ditakrifkan oleh polinomial $|Q^{AHM}(z) \leq 1|$ dan rantau kestabilan mutlak kaedah RK–AHM. Rajah 2c pula menunjukkan perbandingan antara rantau kestabilan mutlak kaedah-kaedah tersebut.



Rajah 2a Permukaan yang ditakrifkan oleh polinomial kestabilan $Q^{AHM}(z)| = |1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} - \frac{47z^5}{3702}| \le 1$



Rajah 2b Rantau kestabilan mutlak bagi kaedah RK-AHM bila $|Q(z) = 1|$



Rajah 2c Perbandingan antara rantau kestabilan mutlak kaedah RK–$\mathrm{H_aM}$ dan RK–AHM

4 PENGIRAAN RALAT ANGGARAN.

Dalam kaedah Rungge–Kutta–Fehlberg anggaran ralat diperolehi dengan menolak hasil suatu kaedah Runge– Kutta berperingkat kelima daripada hasil suatu kaedah Runge-Kutta berperingkat keempat. Manakala, dalam kaedah Merson (lihat Lambert [4]) anggaran ralat didapati dengan menolak suatu kaedah yang mempunyai peringkat yang sama tetapi berbeza bilangan tahap k_i, $(k_i = f_i(.))$ yang digunakan dalam kaedah yang satu lagi. Disini, kita menggunakan dua kaedah iaitu (2.5) dan (2.14) dengan peringkat yang sama, nilai-nilai a_i yang sepunya serta menggunakan kesemua k_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ tetapi berbeza dalam bentuk pengiraan nilai y_{n+1}.

Ralat pangkasan setempat (RPS) bagi kaedah RK–$\mathrm{H_aM}$, diberikan sebagai

$$\begin{aligned} RPS(H_aM) &= y(x_n + h) - y_{n+1}^{H_aM} \\ &= \Big(\frac{61}{1920} f f_y^4 - \frac{61}{7680} f^2 f_y^2 f_{yy} - \frac{17}{960} f^3 f_{yy}^2 - \frac{1}{640} f^3 f_y f_{yyy} \\ &\qquad - \frac{1}{2880} f^4 f_{yyyy}\Big) h^5 + O(h^6) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Manakala ralat pangkasan setempat bagi Kaedah RK–AHM diberi sebagai

$$\begin{aligned} RPS(AHM) &= y(x_n + h) - y_{n+1}^{AHM} \\ &= \Big(\frac{121}{5120} f f_y^4 - \frac{61}{7680} f^2 f_y^2 f_{yy} - \frac{17}{960} f^3 f_{yy}^2 \\ &\qquad - \frac{1}{640} f^3 f_y f_{yyy} - \frac{1}{2880} f^4 f_{yyyy}\Big) h^5 + O(h^6) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Sekarang dengan menolak (4.1) daripada (4.2) kita perolehi

$$y_{n+1}^{H_aM} - y_{n+1}^{AHM} = \frac{25}{3072} f f_y^4 h^5$$

Ini memberikan

$$h^5 f f_y^4 = \frac{3072}{25}(y_{n+1}^{H_aM} - y_{n+1}^{AHM} \tag{4.3}$$

Jika $f_{yy} = 0$, (seterusnya ini akan menyebabkan $f_{yyy} = f_{yyyy} = 0$) yakni f merupakan suatu fungsi linear dalam y, maka dengan menggunakan (4.3) kita perolehi RPS sebagai

$$\begin{aligned} ARPS(H_aM) &= \frac{61}{1920} \times \frac{3072}{25}(y_{n+1}^{H_aM} - y_{n+1}^{AHM}) \\ &= 3.904(y_{n+1}^{H_aM} - y_{n+1}^{AHM}) \end{aligned} \tag{4.4}$$

dan

$$\begin{aligned} ARPS(AHM) &= \frac{61}{1920} \times \frac{3072}{25}(y_{n+1}^{H_aM} - y_{n+1}^{AHM}) \\ &= 2.904(y_{n+1}^{H_aM} - y_{n+1}^{AHM}) \end{aligned} \tag{4.5}$$

Oleh yang demikian, anggaran ralat pangkasan setempat dalam kaedah RK-H_aMdan RK-AHM masing-masing adalah lebih kurang empat kali dan tiga kali ganda beza antara kedua kaedah tersebut.

5 PENGGUNAAN ANGGARAN DAN PENGAWAL RALAT.

Anggaran ralat yang diperolehi dalam Bahagian 4. boleh digunakan dalam prosedur penyelesaian masalah nilai awal menggunakan kaedah RK-H_aM dan RK-AHM. Misalnya kita boleh gunakan prosedur berikut:

Langkah 1 INPUT *toleransi ralat, xmula, xakhir, syarat awal* y_0
Langkah 2 IKiraan = 0
Langkah 3 KIRAKAN
k_1, k_2, k_3, k_4
$y_{n+1}^{H_aM}$ (Kaedah I)
y_{n+1}^{AHM} (Kaedah II)
ralat anggaran $= 3.904(y_{n+1}^{H_aM} - y_{n+1}^{AHM})$
Langkah 4 JIKA (|*ralat anggaran*| > *toleransi ralat*) MAKA
Langkah 5 KIRAKAN $h = h/2$(membahagi duasama panjang langkah)
KEMBALI KE *Langkah 3*
Langkah 6 JIKA (|*ralat anggaran*| < *toleransi ralat*/32)
MAKA
Langkah 7 IKiraan = IKiraan + 1
Langkah 8 JIKA (IKiraan > 2) KEMBALI KE *Langkah 10*
Langkah 9 KIRAKAN $h = 2h$ (menggandakan panjang langkah)
KEMBALI KE *Langkah 3*
Langkah 10 IKiraan = 0
Langkah 11 $y = y_{n+1}^{AHM}$ (Penghampiraan diterima)

Langkah 12 $x = x + h$
Langkah 13 OUTPUT $h, x, penyelesaian\ tepat, y_{n+1}^{H_aM}, |ralat|, |ralat\ anggaran|$
(dimana $ralat = penyelesaian\ tepat\ y(x) - y_{n+1}^{AHM}$)
Langkah 14 JIKA ($x < xakhir$) KEMBALI KE *Langkah 3*
Langkah 15 (Prosedur tamat)
BERHENTI

6 KEPUTUSAN BERANGKA.

Sebagai contoh penggunaan ralat anggaran dan pengawal ralat, kita pertimbangkan masalah nilai awal berikut:

$$y' = -y, \qquad 0 \leq x \leq 10.25$$

Syarat awal: $y(0) = 1.0$
Penyelesaian tepat: $y(x) = e^{-x}$

Jadual 6.1 ialah keputusan yang diperolehi bila ralat anggaran $3.904|(y^{H_aM} - y^{AHM})|$, toleransi ralat $= 10^{-4}$

Jadual 6.2 ialah keputusan yang diperolehi tiada pengawalan dan anggaran ralat digunakan dalam algoritma, dan dengan $h = 0.25$.

7 KESIMPULAN.

Dalam kertas ini kita telah menerbitkan satu rumus yang mempunyai tahap dan peringkat 4 yang kita namakan sebagai H_aM–RK4(4). Rumus ini didapati setanding dengan rumus yang sedia ada seperti yang telah dibincangkan di bahagian pengenalan. Dengan tahap dan peringkat yang sama kita telah dapat menjimatkan satu pengiraan fungsi terutamanya jika fungsi f tersebut berbentuk rumit serta melibatkan banyak operasi pengiraan. Dari analisis di atas bermula dengan $h = 1.0$ kita perolehi keputusan dalam Jadual 6.1 yang menunjukkan bahawa ralat mutlak menghampiri ralat anggaran pada beberapa langkah permulaan. Ia seterusnya menokok akibat daripada kesan ralat global manakala ralat anggaran sentiasa terkawal dan mematuhi batasan yang dikehendaki, iaitu

$$(1/32) \times 10^{-4} < \quad \text{ralat anggaran} \quad < 10^{-4}.$$

Jadual 6.2 pula memberikan keputusan bilamana $h = 0.25$ dan tiada kawalan dan anggaran ralat digunakan dalam penjelasan. Selain daripada lebihan kos dari segi bilangan langkah yang lebih, kita juga dapat melihat bahawa ralat mutlak tidak terkawal dan kejituan tidak terjamin dalam selang x yang diberikan. Dengan menggunakan k_i yang sepunya jelas disini kita telah dapat membangunkan suatu rumus peringkat empat berasaskan kaedah Runge-Kutta yang terdiri daripada gabungan dua min yang berbeza dimana ralat anggaran dapat dibuat bagi penjelasan masalah nilai awal tertentu. Dengan mengambil y^{AHM} (di mana rantau kestabilan mutlaknya lebih besar daripada rantau kestabilan mutlak y^{H_aM}) sebagai penghampiran $y(x)$ dalam algoritma pengaturcaraan kita dapat mengawal ralat dalam batas yang ditetapkan. Kita juga mendapati bahawa kaedah RK-AHM mempunyai rantau kestabilan mutlak yang lebih besar daripada rantau kestabilan mutlak kaedah RK-H_aM. Oleh itu kita gunakan y_{n+1}^{AHM} sebagai penghampiran lanjutaan kepada nilai y pada langkah yang seterusnya supaya saiz langkah h adalah mencukupi dan penumpuan penyelesaian terjamin. Selepas beberapa ujian dijalankan didapati kaedah yang dibina ini sesuai untuk kelas masalah dimana f merupakan suatu fungsi linear dalam y sahaja.

Jadual 6.1

$h = 1.0$, (mula)
$h = 0.5$
$h = 0.25$

x	peny.tepat $y(x)$	peny.berangka H_aM	ralat mutlak $\lvert y^{HM} - y_{tepat}\rvert$	|ralat anggaran| $3.904\lvert y^{HM} - y^{AHM}\rvert$
0.25	0.7888008	0.7788336	0.3281E-04	0.3509E-04
0.50	0.6065307	0.6065748	0.4411E-04	0.2733E-04
0.75	0.4723666	0.4724154	0.4881E-04	0.2129E-04
1.00	0.3678794	0.3679287	0.4927E-04	0.1658E-04
1.25	0.2865048	0.2865519	0.4714E-04	0.1291E-04
1.50	0.2231302	0.2231737	0.4354E-04	0.1006E-04
1.75	0.1737739	0.1738132	0.3922E-04	0.7832E-05
2.00	0.1353353	0.1353700	0.4688E-04	0.6100E-05
2.25	0.1053992	0.1054295	0.3024E-04	0.4751E-05
2.50	0.0820850	0.0821111	0.2606E-04	0.3700E-05

h=0.5
h=0.25

2.75	0.0639279	0.0639501	0.2225E-04	0.2881E-05

h=0.5

3.25	0.0387742	0.0388589	0.8471E-04	0.8047E-04
3.75	0.0235177	0.0236001	0.8239E-04	0.4887E-04
4.25	0.0142642	0.0143330	0.6881E-04	0.2968E-04
4.75	0.0086517	0.0087049	0.5318E-04	0.1803E-04
5.25	0.0052475	0.0052867	0.3920E-04	0.1095E-04
5.75	0.0031828	0.0032108	0.2780E-04	0.6649E-05
6.25	0.0019305	0.0019500	0.1954E-04	0.4038E-05

h=1.0

7.25	0.0007102	0.0007998	0.8967E-04	0.9435E-04
8.25	0.0002613	0.0003183	0.6825E-04	0.3755E-04
9.25	0.0000961	0.0001267	0.3058E-04	0.1495E-04
10.25	0.0000354	0.0000504	0.1507E-04	0.5948E-05

Jadual 6.2

x	peny.tepat $y(x)$	peny.berangka H_aM	ralat mutlak $\lvert y^{HM} - y_{tepat}\rvert$
0.00	1.0000000	1.0000000	0.0000E+00
0.25	0.7788008	0.7774197	0.1381E-02
0.50	0.6065307	0.6043814	0.2149E-02
0.75	0.4723666	0.4698580	0.2509E-02
1.00	0.3678794	0.3652768	0.2603E-02
1.25	0.2865048	0.2839734	0.2531E-02
1.50	0.2231302	0.2207665	0.2364E-02
1.75	0.1737739	0.1716282	0.2146E-02
2.00	0.1353353	0.1334271	0.1908E-02
2.25	0.1053992	0.1037289	0.1670E-02
2.50	0.0820850	0.0806409	0.1444E-02
2.75	0.0639279	0.0626918	0.1236E-02
3.00	0.0497871	0.0487378	0.1049E-02
3.25	0.0387742	0.0378898	0.8845E-03
3.50	0.0301974	0.0294562	0.7411E-03
3.75	0.0235177	0.0228999	0.6179E-03
4.00	0.0183156	0.0178028	0.5128E-03
4.25	0.0142642	0.0138402	0.4240E-03
4.50	0.0111090	0.0107597	0.3493E-03
4.75	0.0086517	0.0083648	0.2869E-03
5.00	0.0067379	0.0065030	0.2350E-03
5.25	0.0052475	0.0050555	0.1920E-03
5.50	0.0040868	0.0039303	0.1565E-03
5.75	0.0031828	0.0030555	0.1273E-03
6.00	0.0024788	0.0023754	0.1034E-03
6.25	0.0019305	0.0018467	0.8379E-04
6.50	0.0015034	0.0014356	0.6781E-04
6.75	0.0011709	0.0011161	0.5479E-04
7.00	0.0009119	0.0008677	0.4421E-04
7.25	0.0007102	0.0006745	0.3563E-04
7.50	0.0005531	0.0005244	0.2868E-04
7.75	0.0004307	0.0004077	0.2306E-04
8.00	0.0003355	0.0003169	0.1852E-04
8.25	0.0002613	0.0002464	0.1486E-04
8.50	0.0002035	0.0001916	0.1192E-04
8.75	0.0001585	0.0001489	0.9545E-05
9.00	0.0001234	0.0001158	0.7639E-05
9.25	0.0000961	0.0000900	0.6109E-05
9.50	0.0000749	0.0000700	0.4882E-05
9.75	0.0000583	0.0000544	0.3899E-05
10.00	0.0000454	0.0000423	0.3112E-05
10.25	0.0000354	0.0000329	0.2482E-05

RUJUKAN

[1] J. H. Ferziger, *Numerical Methods For Engineering Applications*, John Willey & Sons, New York, 1981.

[2] B. B. Sanugi, *New numerical strategies for initial value type ordinary differential equations*, Ph.D. thesis Loughborough University of Technology, 1986.

[3] B. B. Sanugi and D. J. Evans, *A New Fourth Order Runge-Kutta Method Based On Harmonic Mean*, Comp. Stud. Rep 799, LUT, (Jun 1993).

[4] N. Yaacob dan B. B. Sanugi, *Penganggaran dan Pengawalan Ralat Dalam Kaedah H_aM-RK4(4) Untuk Penyelesaian Masalah Nilai Awal*. (Julai 1995), Laporan Teknik, Jab. Matematik, UTM, M/LT No 23.