Matematika, 1993, Jilid 9, bil. 1, hlm. 1-8

PENYELESAIAN GELOMBANG BERGERAK BAGI PERSAMAAN BURGERS TAK HOMOGEN

OLEH
MOHD. NOR BIN MOHAMAD

Jabatan Matematik
Fakulti Sains
Universiti Teknologi Malaysia

Abstrak. Penyelesaian tepat bagi persamaan Burgers tak homogen diperoleh dengan cara menurunkan persamaan tersebut kepada bentuk bilinear melalui penjelmaan pembolehubah tak bersandar. Penyelesaian yang diperoleh adalah penyelesaian gelombang bergerak dan penyelesaian yang menggambarkan penyatuan dua penyelesaian gelombang bergerak.

1. PENGENALAN

Diketahui bahawa persamaan Burgers

$$u_t = auu_x + u_{xx}, \quad (a > 0) \tag{1.1}$$

menggambarkan perambatan gelombang dalam medan jauh bagi suatu sistem kelesapan tak linear (Drazin dan Johnson [1]). Selain daripada itu persamaan ini juga digunakan untuk menerangkan aliran bergelora dalam saluran (Burgers[2]), dan juga struktur suatu gelombang kejutan (Lighthill [3]). Persamaan (1.1) mempunyai penyelesaian gelombang bergerak berbentuk

$$u(x,t) = \frac{2k}{a} + \frac{2k}{a}\tanh k(x - 2kt), \tag{1.2}$$

dengan k sebarangan. Kewujudan penyelesaian di atas adalah hasil daripada imbangan antara kesan kelesapan dan berolak pada persamaan (1.1). Persamaan ini boleh diselesaikan secara tepat dengan menurunkannya kepada persamaan resapan haba

$$f_t = f_{xx} \tag{1.3}$$

melalui penjelmaan Cole-Hopf (Cole [4], Hopf [5])

$$u(x,t) = \frac{2}{a}\frac{\partial}{\partial x}\ln f(x,t). \tag{1.4}$$

Penyelesaian (1.2) menggambarkan bahawa jika pada permulaannya wujud banyak gelombang bergerak, maka gelombang-gelombang ini akan bersatu menjadi satu gelombang bergerak secara asimptot.

Persamaan resapan tak linear jenis Fisher

$$u_t = u_{xx} + cF(u), \tag{1.5}$$

dengan $F(u)$ polinomial terhadap u, pada permulaannya wujud dalam teori pemilihan genetik suatu spesis (Fisher [6]). Persamaan ini juga ditemui dalam teori pembakaran dan kinetik gas (Aris [7], Fife [8]) dan juga dalam teori reaktor nuklear (Canosa [9]).

Usaha-usaha mencari penyelesaian tepat bagi persamaan (1.5) telah dilakukan bagi kes $F(u)$ yang berbentuk fungsi kuadratik dan kubik terhadap u. Ablowitz dan Zeppetella [10] telah mengkaji persamaan

$$u_t = u_{xx} + u(1-u). \tag{1.6}$$

Mereka menggunakan analisis Painlevẽ untuk memperoleh penyelesaian gelombang bergerak

$$u(x,t) = \frac{1}{[1+\mathrm{eksp}\{(\pm x - 5t)/\sqrt{6}\}]^2}. \tag{1.7}$$

Kawahara dan Tanaka[11] telah mengkaji persamaan

$$u_t = u_{xx} + u(1-u)(u-\gamma). \tag{1.8}$$

Mereka mendapati persamaan ini mempunyai tiga penyelesaian gelombang bergerak yang mengaitkan keadaan malar masing-masing $u = 0, 1$, $u = 0, \gamma$ dan $u = \gamma, 1$. Penyelesaian yang diperoleh adalah

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tanh\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\pm x - \frac{1}{\sqrt{2}}(2\gamma-1)t\right], \\ u(x,t) &= \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2}\tanh\frac{\gamma}{2\sqrt{2}}\left[\pm x - \frac{1}{\sqrt{2}}(2-\gamma)t\right], \\ u(x,t) &= \frac{1+\gamma}{2} + \frac{1-\gamma}{2}\tanh\frac{1-\gamma}{2\sqrt{2}}\left[\pm x + \frac{1+\gamma}{\sqrt{2}}t\right]. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Selain daripada itu mereka juga telah menggunakan kaedah bilinear Hirota dan memperoleh penyelesaian tepat yang menggambarkan penyatuan gelombang bergerak

$$u(x,t) = \frac{\text{eksp}(\eta_1) + \gamma\text{eksp}(\eta_2)}{1 + \text{eksp}(\eta_1) + \text{eksp}(\eta_2)}, \tag{1.10}$$

dengan

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{x - (\sqrt{2}\gamma - \frac{1}{\sqrt{2}})t\right\} \tag{1.11a}$$

$$\eta_2 = \frac{\gamma}{\sqrt{2}}\left\{x - (\sqrt{2} - \frac{\gamma}{\sqrt{2}})t\right\}. \tag{1.11b}$$

Motivasi daripada perbincangan di atas ialah untuk mencari penyelesaian gelombang bergerak bagi gabungan persamaan (1.1) dengan (1.6) dan juga persamaan (1.1) dengan (1.8). Pada amnya persamaan ini berbentuk

$$u_t = auu_x + u_{xx} + bF(u) \tag{1.12}$$

yang dikenali sebagai *persamaan Burgers tak homogen.*

Dalam bahagian 2, dibincangkan dengan ringkas kaedah mencari penyelesaian gelombang bergerak bagi persamaan (1.12) apabila $F(u) = u(1-u)$. Manakala dalam bahagian 3, dibincangkan pula dengan mendalam kes apabila $F(u) = u(1-u)(u-\gamma)$. Kertas kerja ini diakhiri dengan memberikan kesimpulan ringkas mengenai kaedah yang digunakan.

2. Penyelesaian Gelombang Bergerak Bagi Kes $F(u) = u(1-u)$

Penyelesaian bagi kes ini telah dibincang oleh Mohd.Nor [12]. Oleh kerana kaedah ini berkaitan dengan apa yang akan digunakan dalam bahagian 3, maka elok diterangkan secara ringkas kaedah yang digunakan untuk mendapatkan penyelesaiannya itu.

Pertimbangkan persamaan

$$u_t = auu_x + u_{xx} + bu(1-u), \tag{2.1}$$

dengan a,b pemalar. Dalam sebutan f, melalui penjelmaan

$$u(x,t) = \frac{2}{a}\frac{\partial}{\partial x}\ln f(x,t), \tag{2.2}$$

persamaan (2.1) terturun kepada bentuk bilinear

$$f_{xt}f - f_x f_t = ff_{xxx} - f_x f_{xx} + bff_x - \frac{2b}{a}f_x{}^2. \tag{2.3}$$

Penyelesaian gelombang bergerak yang menghampiri sifar apabila $|x| \to \infty$ diperoleh dengan andaian

$$f(x,t) = 1 + \text{eksp}(kx - \omega t), \tag{2.4}$$

dengan k dan ω parameter. Jika persamaan (2.4) digantikan ke dalam persamaan (2.3), maka persamaan (2.4) merupakan suatu penyelesaian bagi persamaan (2.3) jika

$$k = \frac{2}{a} \quad \text{dan} \quad \omega = -\frac{a^2}{4} - b.$$

Seterusnya, ungkapan tak tersirat bagi u diberi oleh

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tanh\frac{a}{4}\left\{x + \frac{1}{2}(a + \frac{4b}{a})t\right\}. \tag{2.5}$$

Penyelesaian ini menggambarkan gelombang bergerak yang bertukar secara monoton dari 0 kepada 1 dan mempunyai halaju $-(a+4b/a)/2$. Gelombang ini merambat dalam arah negatif jika $b > -a^2/4$, dalam arah positif jika $b < -a^2/4$ dan berada dalam keadaan keseimbangan jika $b = -a^2/4$.

3. Penyelesaian Gelombang Bergerak Bagi Kes $F(u) = u(1-u)(u-\gamma)$

Sekarang kita pertimbangkan pula persamaan

$$u_t = auu_x + u_{xx} + bu(1-u)(u-\gamma), \tag{3.1}$$

dengan a,b pemalar. Tanpa menghilangkan sifat-sifat fizikalnya, kita boleh andaikan $0 < \gamma < 1$. Dengan menggunakan hujah yang sama seperti dalam bahagian 2, melalui penjelmaan

$$u(x,t) = \alpha\frac{\partial}{\partial x}\ln f(x,t), \tag{3.2}$$

persamaan (3.1) terturun kepada bentuk bilinear

$$\begin{aligned} f_{xt}f - f_x f_t = (a\alpha - 3)f_x f_{xx} + ff_{xxx} - b\gamma f f_x \\ + b\alpha(\gamma+1){f_x}^2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Pekali α dalam persamaan (3.2) mesti memenuhi

$$b\alpha^2 + a\alpha - 2 = 0. \tag{3.4}$$

Perhatikan bahawa penjelmaan (3.2) sama dengan penjelmaan (1.4) jika $b = 0$. Sebaliknya jika $a = 0$, penjelmaan (3.2) ini terturun kepada penjelmaan yang telah digunakan oleh Kawahara dan Tanaka [11].

Penyelesaian gelombang bergerak diperoleh dengan andaian

$$f(x,t) = e^{\delta x}(1 + \text{eksp}[kx - \omega t]), \tag{3.5}$$

dengan k dan ω parameter. Dengan memasukkan persamaan (3.5) ke dalam persamaan (3.3), didapati bahawa persamaan (3.5) merupakan penyelesaian tak remeh persamaan (3.3) bagi enam set parameter yang berikut:

$$\delta = 0, \qquad k = \frac{1}{\alpha}, \qquad \omega = b\gamma - \frac{1}{\alpha^2}, \tag{3.6a}$$

$$\delta = \frac{1}{\alpha}, \qquad k = -\frac{1}{\alpha}, \qquad \omega = b\gamma - \frac{1}{\alpha^2}, \tag{3.6b}$$

$$\delta = 0, \qquad k = \frac{\gamma}{\alpha}, \qquad \omega = b\gamma - \frac{\gamma^2}{\alpha^2}, \tag{3.7a}$$

$$\delta = \frac{\gamma}{\alpha}, \qquad k = -\frac{\gamma}{\alpha}, \qquad \omega = b\gamma - \frac{\gamma^2}{\alpha^2}, \tag{3.7b}$$

$$\delta = \frac{1}{\alpha}, \qquad k = -\left(\frac{1-\gamma}{\alpha}\right), \qquad \omega = \frac{1-\gamma^2}{\alpha^2}, \tag{3.8a}$$

$$\delta = \frac{\gamma}{\alpha}, \qquad k = \frac{1-\gamma}{\alpha}, \qquad \omega = -\left(\frac{1-\gamma^2}{\alpha^2}\right). \tag{3.8b}$$

Perlu ditegaskan di sini bahawa δ menentukan nilai u secara asimptot apabila $x \to \infty$ atau $x \to -\infty$. Selain daripada itu, bagi ungkapan (3.6a) hingga (3.8b), ungkapan (3.6a), (3.7a) dan (3.8a) masing-masing memberikan nilai u yang sama dengan ungkapan (3.6b), (3.7b) dan (3.8b). Akhirnya diperoleh tiga penyelesaian gelombang bergerak bagi u masing-masing diberi oleh

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tanh\frac{1}{2\alpha}\left\{x - (b\gamma\alpha - \frac{1}{\alpha})t\right\}, \tag{3.9a}$$

$$u(x,t) = \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2}\tanh\frac{\gamma}{2\alpha}\left\{x - (b\alpha - \frac{\gamma}{\alpha})t\right\}, \tag{3.9b}$$

$$u(x,t) = \frac{1+\gamma}{2} + \frac{1-\gamma}{2}\tanh\frac{1-\gamma}{2\alpha}\left\{x + (\frac{1+\gamma}{\alpha})t\right\}. \tag{3.9c}$$

Penyelesaian-penyelesaian ini terturun kepada penyelesaian gelombang bergerak yang khusus bagi persamaan Burgers jika $a \to 0$ dan kepada penyelesaian gelombang bergerak (1.9) jika $b \to 0$.

Satu sifat yang menarik bagi persamaan (3.3) ialah persamaan ini mempunyai penyelesaian tepat yang menggambarkan penyatuan dua gelombang bergerak. Dengan penggantian

$$f = 1 + \mathrm{eksp}(\eta_1) + \mathrm{eksp}(\eta_2), \tag{3.10}$$

dengan

$$\eta_1 = \frac{1}{\alpha}\left\{x - (b\gamma\alpha - \frac{1}{\alpha})t\right\} \tag{3.11a}$$

$$\eta_2 = \frac{\gamma}{\alpha}\left\{x - (b\alpha - \frac{\gamma}{\alpha})t\right\} \tag{3.11b}$$

maka boleh ditunjukkan dengan mudah bahawa (3.10) memenuhi persamaan (3.3). Penyelesaian ini menggambarkan suatu keadaan tak pegun gelombang bergerak yang mengaitkan keadaan $u = 0, \gamma$ dan satu lagi $u = \gamma, 1$ yang bercantum (bersatu) untuk membentuk gelombang bergerak yang mengaitkan keadaan $u = 0, 1$. Penyelesaian ini merupakan perluasan daripada persamaan (1.10) dan (1.11).

4. Kesimpulan

Daripada perbincangan di atas kita lihat bentuk bilinear bagi persamaan evolusi tak linear yang ditulis dalam bentuk pengoperasi Hirota memainkan peranan yang penting dalam mencari penyelesaian tepat. Struktur persamaan bilinear adalah jelas dan memudahkan analisis aljabar.

Rujukan

[1] Drazin,P.G. and Johnson,R.S, "Solitons:An Introduction," Cambridge University Press, 1989.

[2] Burgers, J.M, *A mathematical model illustrating the theory of turbulence*, Adv.Appl.Mech **1** (1948), 171-199.

[3] Lighthill, M.J, *Viscosity effects in sound wave of finite amplitude*, "In surveys in Mechanics,ed.G.K. Batchelor and R.M. Davies," Cambridge University Press, 1956.

[4] Cole, J.D, *On a quasi-linear parabolic equation occuring in aerodynamics*, Quart.Appl.Math **6** (1951), 225-236.

[5] Hopf,E, *The partial differential equation* $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$, Comm.Pure Appl.Math **3** (1950), 201-230.

[6] Fisher, R.A, *The wave of advance of advantageous genes*, Ann.Eugenics **7** (1936), 355-369.

[7] Aris, R, "The mathematical theory of diffusion and reaction in permeable catalysts," Oxford University Press, 1975.

[8] Fife, P.C, *Mathematical aspects of reacting and diffusing systems*, Springer Lecture Notes in Biomathematics **28** (1979), Heildelberg: Springer-Verlag.

[9] Canosa, J, *Diffussion in nonlinear multiplicative media*, J.Math.Phys **10** (1969), 1862-1868.

[10] Ablowitz, M.J. and Zeppetella,A, *Explicit solutions of Fisher's equation for a special wave speed*, Bull.Math.Bio **41** (1979), 835-840.

[11] Kawahara, T, and Tanaka, M, *Interactions of travelling fronts: An exact solution of a nonlinear diffusion equation*, Phy. Lett **97A** (1983), 311-314.

[12] Mohd.Nor bin Mohamad, *Penyelesaian tepat bagi persamaan Burgers tak homogen*, Prosiding Simposium Kebangsaan Sains Matematik ke-V (1992), 183-187.