Matematika, 1991, Jilid 7, no. 1, hlm 1-9,
© Jabatan Matematik, UTM.

# PENYELESAIAN BERKALA PERSAMAAN PEMBEZA YORK

oleh

YUSOF BIN YAACOB

Jabatan Matematik, Fakulti Sains,

Universiti Teknologi Malaysia,

Karung Berkunci 791,

80990 Johor Bahru, Johor.

*ABSTRAK*

*Kertas ini memperihalkan perluasan persamaan pembeza York. Dalam bentuk asalnya persamaan pembeza York berbentuk lengah pemalar manakala dalam kertas ini lengah itu bergantung juga kepada keadaan sistem itu. Jika lengah itu besar maka wujud penyelesaian berkala.*

## 1. Pendahuluan

Kita mulai dengan persamaan pembeza York (lihat Nussbaum [9])

$$y'(s) = -f(y(s-\alpha)) \tag{1}$$

dengan $\alpha$ suatu pemalar positif dan

$$f(y) = \frac{r}{1+|r|^{r+1}}, \ r>2. \tag{2}$$

Persamaan (1) dan (2) adalah suatu model pengeluaran sel darah merah.

Banyak kajian telah dibuat mengenai (1) dan (2), atau dalam bentuk setaranya $x'(t) = -\alpha f(x(t-1))$ (lihat Angelstorf [1], Chapin [2,3], Kaplan dan York [6] dan Nussbaum [7,8,9]). Perlu juga difikirkan bahawa lengah dalam persamaan (1) itu dipengaruhi juga oleh $y(s)$ iaitu keadaan sistem itu pada sebarang ketika. Sekarang dipertimbangkan persamaan

$$y'(s) = -f(y(s-g(y(s))-\alpha)),\ \alpha\geq 1 \tag{3}$$

dengan fungsi dalam persamaan (2) termasuk dalam kelas fungsi f. Dengan penggantian $s = \alpha t$ dan $y(s) = x(t)$, persamaan (3) adalah setara dengan

$$x'(t) = -\alpha f(x(t - \alpha^{-1}g(x(t)) - 1)). \tag{4}$$

Persamaan yang akan dikaji adalah dalam bentuk ini.

Bagi memudahkan kita, kita gunakan tatatanda $p = 1 + \alpha^{-1}\|g\|$ dengan $\|g\| = \sup\{|g(x)|: -\infty < x < \infty\}$. Kelas fungsi $f$ dan $g$ menepati hipotesis berikut:

H1 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah suatu fungsi ganjil, $C^1$ dan terbatas. Wujud suatu nilai $x_*$ dengan $f|[0,x_*]$ tak menyusut dan $f|[x_*,\infty)$ tak menokok. Juga wujud pemalar positif $d$, $r$, $x_0$ dan $\sigma$ yang memenuhi

$$(1 - dx^{-\sigma})x^{-r} \leq f(x) \leq (1 + dx^{-\sigma})x^{-r},\ x \geq x_0.$$

H2 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah suatu fungsi genap, $C^1$, terbatas dan tak negatif dengan $g|[0,\infty)$ tak menyusut, $\|g\| \leq 1$ dan $\|g'\| \leq 1$.

Penyelesaian bagi

$$x'(t) = -\alpha f(x(t - \alpha^{-1}g(x(t)) - 1)) \tag{5}$$

$$x|[0,p] = \varphi \tag{6}$$

dengan $p \le t < T \le \infty$, bagi fungsi awal $\varphi|[0,p]$, adalah suatu fungsi $x(t)$ yang mempunyai sifat-sifat berikut:

i) $x(t) = \varphi(t)$ , $0 \le t \le p$,

ii) $x(t)$ tertakrif dan selanjar bagi $0 \le t < T$,

iii) $x(t)$ wujud dalam doamain $g(x)$ bagi $0 \le t < T$,

iv) $x(t)$ memenuhi persamaan (5) bagi $p \le t < T$, dengan terbitan sebelah kanan diambil pada $t=p$.

Teorem asas kewujudan dan keunikan persamaan pembeza lengah adalah seperti berikut:

**Teorem 1.**[4]: Andaikan $f(x)$ dan $g(x)$ selanjar dan Lipschitz. Jika $\varphi|[0.p]$ Lipschitz, maka masalah awal (5) dan (6) mempunyai penyelesaian unik dan selanjar terhadap fungsi awal.■

## 2. Keputusan Yang Diperolehi

Keputusan utama yang diperolehi ialah teorem berikut:

**Teorem 2:** Andaikan H1 dan H2 benar, $r>0$ dan $\sigma>r/(r-1)$. Jika $\alpha$ besar maka wujud penyelesaian berkala $x_\alpha(t)$ bagi (5) dan (6) yang mempunyai sifat-sifat berikut:

i) Wujud $q_\alpha>2(1+\alpha^{-1}\|g\|)$ dengan $x_\alpha(t)>0$ untuk $0<t<q_\alpha$ dan $x_\alpha(t+q) = -x_\alpha(t)$ untuk semua t.

ii) $\text{had}_{\alpha\to\infty} q_\alpha = \infty$. Suatu pemalar $\beta=\beta(r)$ memang wujud unt memenuhi $q_\alpha \ge \beta\alpha^{r-2}$.■

Contoh: Semua keputusan Teorem 2 benar untuk

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|^{r+1}} \text{ dan } g(x) = \frac{x^{2r}}{2(1+x)^{2r}}$$

dengan r integer positif dan r>2.

Pembuktian Teorem 2 melibatkan analisis asimptot penyelesaian x(t) bagi persamaan (5) dan (6) dan penggunaan teorem Titik Tetap Schauder.

Teorem (Teorem Titik Tetap Schauder): Andaikan K suatu subset tertutup, terbatas dan cembung bagi suatu ruang Banach. Jika pemetaan $F : K \to K$ adalah selanjar dan padat maka F mempunyai suatu titik tetap.■

## 3. Ringkasan Pembuktian Teorem 2

Andaikan $\varepsilon = (r+1)^{-1}$. Set $K_\alpha$ ditakrif seperti berikut:

$$K_\alpha = \{\varphi \in C^1[0,p] : \varphi \le \alpha f(x_*),\ \|\varphi'\| \le \alpha f(x_*),$$
$$\varphi \text{ tak menokok, } \varphi(p) = (2.1)\alpha^{\varepsilon}\}.$$

Mengikut Teorem 1 wujud penyelesaian unik $x(t;\varphi,\alpha)$ bagi masalah awal (5) dan (6) untuk $\varphi$ berada dalam $K_\alpha$ dengan f dan g memenuhi H1 dan H2. $C^1[0,p]$ adalah suatu ruang Banach dengan $\|\varphi\| = \text{mak}\,\{\text{mak}_{0\le t\le p}|\varphi(t)|, \text{mak}_{0\le t\le p}|\varphi'(t)|\}$. $K_\alpha$ adalah suatu set tertutup, terbatas dan cembung.

Andaikan $z_1$ sifar pertama bagi $x(t;\varphi,\alpha)$ dan $m = x(z_1-1)$. Boleh dibuktikan bahawa terdapat pemalar positif $c_1$ dan $c_2$ memenuhi

$$c_1\alpha^{\varepsilon} \le m \le c_2\alpha^{\varepsilon}. \tag{7}$$

Seterusnya kita boleh buktikan juga bahawa

$$x(z_1+2p) \le -c_3 m^{r-1} \tag{8}$$

dengan $c_3$ pemalar positif.

Bagi nilai m yang cukup besar (oleh kerana (7) ini bermakna juga bagi nilai $\alpha$ yang cukup besar) dan $r>2$ maka didapati

$$x(z_1+2p) \le -c_3 m^{r-1} \le -\frac{(2.1)m}{c_1} \le -(2.1)\alpha^{\varepsilon}. \tag{9}$$

Takrifkan $\tau$ sebagai nilai t yang pertama lebih besar daripada $z_1+2p$ memenuhi $x(\tau) = -(2.1)\alpha^{\varepsilon}$.(Boleh ditunjukkan dengan senang bahawa $z_1$ dan $\tau$ wujud).

Seterusnya takrifkan

$$F_\alpha\varphi = \psi,\ \psi(t) = -x(\tau-p+t),\ 0 \le t \le p.$$

Boleh dibuktikan bahawa $F_\alpha$ memetakan $K_\alpha$ ke $K_\alpha$ dan $F_\alpha$ adalah suatu pemetaan yang selanjar dan padat.

Mengikut teorem 3, $F_\alpha$ mempunyai suatu titik tetap $\phi_\alpha$. Oleh kerana f ganjil dan g pula genap maka $x(t;\phi_\alpha,\alpha)$ adalah penyelesaian berkala bagi persamaan (5) dengan kalaan $2(\tau(\phi_\alpha,\alpha)-p) = 2q_\alpha$. Jika ditakrifkan $x_\alpha(t) = -x(t+z_1;\phi_\alpha,\alpha)$ maka $x_\alpha(t)$ adalah penyelesaian berkala bagi (5) dengan $x_\alpha(t) > 0$ bagi $0<t<q_\alpha$, $q_\alpha = \tau(\phi_\alpha,\alpha)-p$ dan $x_\alpha(t+q_\alpha) = -x_\alpha(t)$ untuk semua t. Boleh dibuktikan juga bahawa $p_\alpha \ge \beta\alpha^{r-2}$ dengan $\beta(r)$ suatu pemalar positif.(Pembuktian lengkap mengenai Teorem 2 boleh didapati dalam [10]).

## 4. Penyelesaian Berkala Bagi g Tak Menyusut

Sekarang pertimbangkan fungsi $g$ yang memenuhi hipotesis H2(b) yang berikut:

H2(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah suatu fungsi tak menyusut, $C^1$, terbatas dan tak negatif dengan keadaan $\|g\| \le 1$ dan $\|g'\| \le 1$.

Penyelesaian berkala juga wujud bagi persamaan (5) yang memenuhi H1 dan H2(b) tetapi sifat kualitatifnya berbeza.

**Teorem 4:** Andaikan H1 dan H2(b) benar, $r>2$ dan $\sigma>r/(r-1)$. Jika $\alpha$ besar maka wujud penyelesaian berkala $x_\alpha(t)$ bagi (5) dan (6) yang mempunyai sifat-sifat berikut:

i) Wujud $q_\alpha > 1+\alpha^{-1}\|g\|$ dan $\hat{q}_\alpha > 2q_\alpha$ dengan $x_\alpha(t)>0$ untuk $0<t<q_\alpha$, $x_\alpha(t)<0$ untuk $q_\alpha<t<\hat{q}_\alpha$ dan $x_\alpha(t) = x_\alpha(\hat{q}_\alpha+t)$ untuk semua $t$.

ii) $\text{had}_{\alpha\to\infty} q_\alpha = \infty$. Suatu pemalar $\gamma=\gamma(r)$ memang wujud untuk memenuhi $q_\alpha \ge \gamma\alpha^{r-2}$. ■

**Contoh:** Semua keputusan Teorem 4 benar untuk

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|^{r+1}} \text{ dan } g(x) = 0.5(1 + \tanh x).$$

Pembuktian Teorem 4 serupa dengan pembuktian Teorem 2. Dengan menggunakan tatatanda seperti tatatanda dalam pembuktian Teorem 2, suatu pemetaan selanjar dan padat $F_\alpha$ dari $K_\alpha$ ke $K_\alpha$ ditakrifkan supaya titik tetapnya memberikan penyelesaian berkala bagi (5) dan (6). Tetapi dalam kes g tak menyusut pemetaan $F_\alpha$ berlainan dengan kes bila g genap.

Misalkan $z_1$ dan $z_2$ menandakan sifar pertama dan kedua bagi $x_\alpha(t)$ apabila $\varphi$ berada dalam $K_\alpha$. Kemudian $x_\alpha(z_2+2p) \geq k\alpha^\varepsilon$ dapat dibuktikan. Kita takrifkan

$$\tau = \tau(\varphi,\alpha) = \inf \{t \geq z_2+2p : x_\alpha(t) = k\alpha^\varepsilon\}$$

dan pemetaan $F_\alpha$ dari $K_\alpha$ ke $K_\alpha$ dengan $F_\alpha(\varphi) = \varphi$ dan

$$\psi(t) = x_\alpha(\tau-p+t),\ 0\leq t\leq p.$$

(Boleh dibuktikan dengan senang bahawa $z_1$, $z_2$ dan $\tau$ wujud). $F_\alpha$ adalah suatu pemetaan selanjar dan padat. Dengan menggunakan Teorem Titik Tetap Schauder, $F_\alpha$ mempunyai titik tetap $\varphi_\alpha$ dalam $K_\alpha$ yang memberikan penyelesaian berkala bagi (5) dan (6). (Pembuktian lengkap mengenai Teorem 2 boleh didapati dalam [10]).

## 5. Penyelesaian Hampir

Teorem 2 (atau Teorem 4) membuktikan kewujudan penyelesaian berkala bagi (5) dan (6) untuk fungsi f dan g yang memenuhi hipotesis H1 dan H2 (atau H1 dan H2(b)). Seperti yang biasa terjadi penyelesaian tepat untuk x(t) sukar didapati bagi f, g dan $\varphi$ yang diberi dan penyelesaian berangka digunakan. Suatu kaedah berangka yang digunakan adalah seperti yang digunakan oleh Feldstein [5], iaitu menggunakan kaedah Runge-Kutta yang disesuaikan untuk persamaan pembeza lengah dengan menggunakan interpolasi Lagrange untuk penghampiran x(t) yang berada dalam hujah lengah itu.

Teorem 2 (atau Teorem 4) juga hanya menyatakan bahawa jika nilai $\alpha$ cukup besar maka wujud penyelesaian berkala, tetapi tidak dinyatakan batas bawah untuknya. Penyelesaian berangka, (lihat [10]), menunjukkan bahawa penghampiran untuk batas bawah itu 1.6. Bukti secara analisis mengenai batas bawah ini belum lagi diperolehi.

**Rujukan:**


[1] Angelstorf,N.: *Periodic Solutions of $u'(t) = -f(u(t-1))$: Multiplicity results and small period solutions;* Math. Meth. in the Appl. Sci. 5(1983), 162-175.

[2] Chapin,S.A.: *Asymptotic Analysis of Differential-Delay Equations and Nonuniqueness of Periodic Solutions;* Math. Meth. in the Appl. Sci. 7(1985), 223-237.

[3] Chapin,S.A. dan Nussbaum,R.D.: *Asymptotic Estimates for the Periods of Periodic Solutions of a Differential-Delay Equations;* Michigan Math. J. 31(1984), 215-229.

[4] Driver,D.: *Existence Theory for a Delay-Differential Systems;* Contributions to Differential Equation Vol. 1 No. 3(1963), 317-336.

[5] Feldstein, A.: *Numerical Solution of Functional Differential Equations With State-Dependent Lags;* Ph.D. Dissertation, Arizona State University, 1974.

[6] Kaplan,J. dan York,J.: *Ordinary Differential Equations Which Yields Periodic Solutions of Differential-Delay Equations;* J.Math.Anal. and Applications 48(1974), 317-324.

[7] Nussbaum,R.D.: *Asymptotic Analysis of Functional Differential Equations and Solutions of Long Period;* Arch. Rational Mech. Anal. 81(1983), 373-397.

[8] Nussbaum,R.D.: *Periodic Solutions of Some Nonlinear Autonomous Functional Differential Equations;* Ann. Mat. Pura Appl. 101(1974), 263-306.

[9] Nussbaum,R.D.: *The Range of Periods of Periodic Solutions* $x'(t) = -\alpha f(x(t-1))$; J.Math.Anal. and Appl. 58 (1977), 280-292.

[10] Yusof Bin Yaacob: *Periodic Solutions of Some Functional Differential Equations With State-Dependent Delays;* Ph.D. Dissertation, Ohio University, 1990.